ISBN 978-5-9907433-9-7

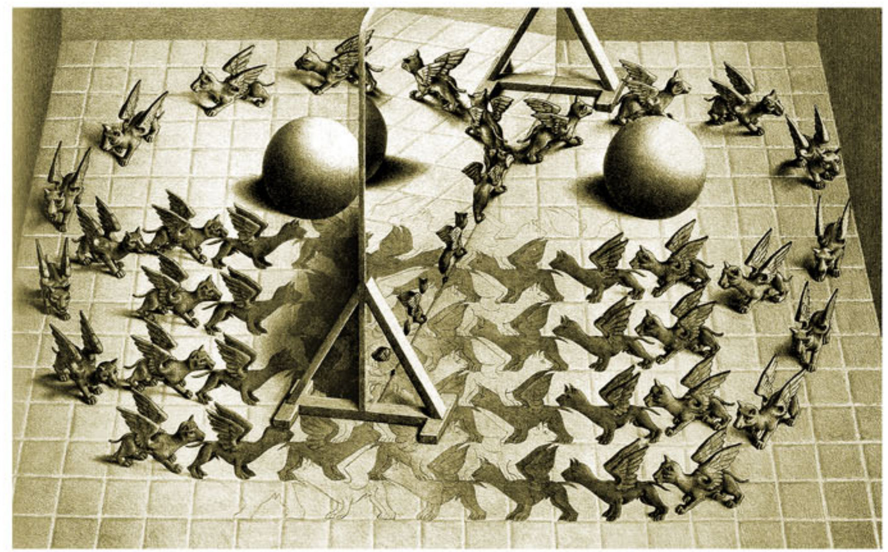
ОБРАЗЫ МАТЕМАТИКИ

Н.Г. БАРАНЕЦ, А.Б. ВЕРЁВКИН

Н.Г. БАРАНЕЦ, А.Б. ВЕРЁВКИН

ОБРАЗЫ МАТЕМАТИКИ

(СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ О НАУКЕ)



Н.Г. БАРАНЕЦ, А.Б. ВЕРЁВКИН

ОБРАЗЫ МАТЕМАТИКИ

(СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ О НАУКЕ)

Ульяновск

2015

ББК 22.3ф 22.3г 87.1 63.3.
Б241

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ), проект № 14-13-73002

Рецензенты:
Доктор философских наук, профессор В.А. Бажанов,
Доктор философских наук, профессор А.А. Касьян.

Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б.

Б241 **Образы математики.** Советские математики о науке. / Н.Г. Баранец, А.Б. Верёвкин. – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2015. – 328 с.

ISBN 978-5-9907433-9-7

В монографии исследуются взгляды некоторых отечественных математиков на свой предмет и на статус математического знания. Показана последовательная эволюция философской математической традиции XX века от позитивизма, к конвенционализму, диалектическому материализму и структурализму. Изложены отдельные эпизоды драматической кампании по диалектизации математики в 1930–40-е годы. Рассмотрены концепции математики А.В. Васильева, В.А. Стеклова, О.Ю. Шмидта, А.Н. Колмогорова, А.Д. Александрова, А.А. Ляпунова, Г.Е. Шилова, М.М. Постникова, В.И. Арнольда, Н.Н. Моисеева, И.Р. Шафаревича, Ю.И. Манина и других. Книга написана для студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся историей и философией математики.

ISBN 978-5-9907433-9-7

ВВЕДЕНИЕ

Математика – основа всего точного естествознания. Для того чтобы в совершенстве выполнить это высокое предназначение, пусть в грядущем столетии она обретёт гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением приверженцев».
Д. Гильберт

Математика, на первый взгляд, относится к исключительной области интеллектуальной деятельности, где не осталось места всему связанному со страстями, предубеждениями и произволом. Требования логической строгости за последние столетия превратили её в совершенный образец научности для других дисциплин, некоторые из которых, отчаявшись достичь подобного уровня доказательности, создали собственные идеалы достоверности, объявив математику только языком или орудием для своего способа постижения мира. Погоня за ускользающей истиной, внезапные озарения и совершенная красота открывающейся реальности привлекают в математику новых искателей знания. При этом математика темна для множества людей, не перешедших некоторой качественной границы понимания окружающих явлений.

Российская математика несколько моложе математики европейской. Условия для развития науки в России были заложены реформами Петра I. Ведущие учёные своего времени нашли приложение талантам в Санкт-Петербурге. Молодая российская наука возникла под их влиянием. К началу XX века ещё малочисленное математическое сообщество России было тесно связано с математиками Германии и Франции, только начиная обретать концептуальное своеобразие. Иностранное методологическое воздействие определялось образовательной зависимостью российских учёных, совершенствовавшихся в немецких и французских математических школах в заграничных командировках при подготовке к профессорскому званию. Общность единого, весьма узкого европейского интеллектуального пространства была в то время реальностью. Сколько-нибудь значимые математические достижения не оставались без внимания уже потому, что количество математических журналов, публиковавших и освещавших новые работы, было невелико, а большинство математиков, работавших в той или иной области, знали друг друга лично и переписывались между собой. Коммуникации учёных способствовали регулярно проводившиеся с 1890-х годов Всемирные математические конгрессы.

Российские математики успешно решали актуальные научные задачи, интересовались философией математики, методикой преподавания математических дисциплин и историей математических наук. В 1860–90-х годах проблема классификации наук, определения их предмета и методов была весьма респектабельной. Она занимала многих выдающихся естествоиспытателей Европы. Учёные выясняли структуру научного знания в целом, искали критерии правильной научной работы. Этим интересовались и отечественные исследователи. Под идейным влиянием зарубежных коллег они создавали достаточно оригинальные концепции науки. Работе в этом направлении помогали проекты написания энциклопедий, просветительских статей для популярных журналов и сложившаяся практика вводных наставлений к дисциплинам, открытых профессорских лекций, в которых проблематика отдельного курса прописывалась в широком историческом контексте развития предмета, его функций и поля применения. Это был период динамичного развития наук, появления новых дисциплин и осознания ограниченности старых классических представлений. В физике, биологии и математике назревали серьёзные перемены. Учёные искали новые концепции, обдумывая происходящее переустройство.

Интенсивная работа российских математиков XIX – начала XX вв. стала фундаментом выдающихся достижений советской математики и всего того интеллектуального наследия, которым воспользовалась современная международная наука, почти забывшая национальные корни. Но идеи выдающихся отечественных учёных в области философии математики менее известны и являют собою плодородное поле исследований для эпистемологов и историков науки.

В этой книге мы сообщаем о том, как в отечественном математическом сообществе понимали и продолжают понимать смысл и цели своей науки, с какими философскими и идеологическими затруднениями сталкивались выдающиеся учёные и какие коллизии возникали по этому поводу.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЕ XX ВЕКА

Философская традиция представления математики. Образ математики в XIX веке зависел от философской традиции понимания предмета и метода математики, а также – от внутренних тенденций развития математических дисциплин. Говоря о метаморфозах образа математики, вспомним о Платоне, Аристотеле, Декарте, Лейбнице и Канте, чьи идеи издавна направляли представления о математическом знании.

Сообщают[1], что первое обоснование философской значимости математики дал *Платон*[2]. В числах и геометрических фигурах он видел эйдосы и парадейгмы –

---

[1] *«Философия математики»*/ Новая философская энциклопедия (http://iph.ras.ru/elib/3216.html)

[2] Платон (якобы, 428–348 до н.э.) – легендарный древнегреческий философ, изначально звался Аристоклом. Автор 36 сочинений, не все из которых признаются подлинными. Их издавна называют диалогами, хотя многие являются диалектическими полилогами, а по жанру – нравоучительными пьесами. В трудах Платона, в основном от имени философа Сократа и его собеседников, представлены различные философские позиции: идеализм, реализм, скептицизм, мистицизм и др. Идейную непоследовательность Платона объясняют возрастными изменениями мировоззрения. Его вклад в философию – разделение бытия на мир неизменных идей и мир переменных явлений, несовершенно воплощающих идеи. Мир платоновских идей бесконечно разнообразен, разделяясь по степени достоинства, а во главе стоит идея блага. Разум человека познаёт идеи, касаясь необходимого и общего. Чувственное восприятие рождает мнение, где нет места истине. Согласно античному комментатору Альбину, математическим дисциплинам Платон придавал промежуточный статус *«рассуждения»* между истинной наукой о первичных сущностях – диалектикой – и чувственными ощущениями.

начала, благодаря которым вещи обретают смысл и бытие. Математика перенаправляет ум с преходящего и становящегося на подлинно сущее, устойчивое и определённое в себе.

Вопреки мнениям об увлечённости Платона математикой, это слово он употребляет в диалогах лишь один раз[3]. Но его герои нередко беседуют об арифметике, геометрии и астрономии в отдельности. В их речах нелегко найти содержание и принципы этих дисциплин[4]. Платон бесспорно знаком с теоремой Пифа-

---

[3] *«Скажем, тот, кто занимается математикой или другим делом, требующим сильного напряжения мысли, должен давать и телу необходимое упражнение, прибегая к гимнастике; напротив, тому, кто преимущественно трудится над развитием своего тела, следует в свой черёд упражнять душу, занимаясь музыкой и всем тем, что относится к философии, если только он хочет по праву именоваться не только прекрасным, но и добрым»* (Тимей).

[4] Характерные примеры: *«Предположи, что арифметика – это охота за всевозможными знаниями чётного и нечётного. … Не тот ли знаток арифметики, кто знает все числа? Ведь в душе у него присутствуют знания всех чисел»* (Теэтет). *«Нам же представляется, что между множеством треугольников есть один, прекраснейший, ради которого мы оставим все прочие, а именно тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник – равносторонний. … Итак, нам приходится отдать предпочтение двум треугольникам как таким, из которых составлено тело огня и [трёх] прочих тел: один из них равнобедренный, а другой таков, что в нём квадрат большой стороны в три раза больше квадрата меньшей»* (Тимей). *«Тебе легче будет понять, если сперва я скажу вот что: я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, счётом и тому подобным, предполагают в любом своём исследовании, будто им известно, что такое чёт и нечёт, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчёт ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают*

гора и обсуждает связанную с ней проблему несоизмеримости. С его именем связана сложная геометрическая задача классификации правильных многогранников – платоновых тел. Описание их построения и приложение к космологии можно найти в диалоге «Тимей». Помимо прочего, у Платона есть зачатки систематизации наук – он разделяет математические искусства на прикладные и чисто теоретические[5].

Историк математики В.В. Бобынин считал, что главным математическим достижением Платона было создание философии математики и её методологии.

уже всё остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения. … Но ведь когда они вдобавок пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили» (Государство. Книга VI). *«Ибо и иней, и град, и медвяная роса происходят от таких преувеличенных, неумеренных любовных вожделений, знание которых, когда дело касается движения звёзд и времён года, именуется астрономией»* (Пиршество).

[5] *«Во-первых, об арифметике. Не следует ли одну её часть називать искусством большинства, другую же – искусством философствующих? … Одни ведь подвергают счёту и нарицательные единицы того, что можно подсчитывать, например: два лагеря, два быка и два самых малых или же два величайших предмета. Другие же никогда не последуют за ними, если только не будет допущено, что между многими тысячами [подлежащих счёту] единиц не существует никакого различия. … а что ты скажешь относительно искусства счёта и измерения, применяемых при постройке домов и в торговле, в отличие от геометрии и вычислений, применяемых в философии: нужно ли назвать то и другое одним искусством или же допустить два? … существуют две арифметики и два искусства измерения, и эта двойственность присуща всем другим смежным с ними искусствам того же рода, хотя каждое из них и носит одно и то же имя»* (Филеб).

Философа занимало установление строгих определений элементарной геометрии, выявление и обоснование её основных положений, логическое упорядочение известных математических знаний и понятий, а также прояснение методов доказательства новых истин, употребляемых в науке, но ещё не осознанных в достаточной степени[6]. Неоплатоник Прокл Диадох приписал Платону разработку трёх методов: аналитического, синтетического и апагогического. Аналитический метод сводит предмет к исследованию его простейших частей. Синтетический соединяет отдельные элементы в одно целое. Апагогический иначе зовётся *«рассуждением от противного»*. Эти методы вполне осуществлены в *«Началах»* Евклида. О собственных математических исследованиях Платон не упоминал.

Платонизм прочно обосновался в математике, предлагая иллюзорное объяснение онтологического статуса объектов. Легко обнаружить разноречивые суждения об этом предмете, например: «*Разум или даже душа не принимают участия в создании математических истин, а просто находятся в курсе их существования, если должным образом подготовлены. Именно в этом последователи Пифагора, и Платона среди них, расходятся с большинством математиков XX века*»[7] или «*Большинство специалистов-математиков уверены в том, что математические формулы и идеи населяют свой отдельный мир*»[8].

---

[6] Бобынин В.В. *«Математика»*/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. 36. – СПб, 1896.
[7] Белл Э.Т. *«Магия чисел. Математическая мысль от Пифагора до наших дней»*. – М.: ЗАО Центрполиграф, 2014, с. 231.
[8] Френкель Э.В. *«Любовь и математика. Сердце скрытой реальности»*. – СПб: Питер, 2015, с. 289.

Многие философствующие математики XX века придерживались *платонизма*. Напомним, это учение провозглашает[9], что математика отражает мир идей, а теория истинна и эффективна лишь по мере соответствия этому совершенному миру. Философы истолковали тёмные фрагменты платоновских диалогов в том смысле, что Платон придавал идеям объективный характер, признавая их вещами особой реальности. Поэтому его позицию называют *реализмом*[10]. Но этот запутывающий термин в таком значении в древности не употреблялся, и, вероятно, был впервые запущен геттингенским профессором И.Ф. Гербартом[11] для наименования собственного философского учения. Вещи он представлял комплексами ощущений, простыми носителями которых служат особые сущности – *«реалы»*[12] (лат. *res* – вещь). Здесь узнаваем возврат к средневековым представлениям о первичных стихиях и их мифических носителях – *«элементалях»*[13]. Гербарт объявил, что развивает учение Канта, но своим идейным предшественником назначил Платона. Он отнёс к сво-

---

[9] Харди Г.Г. *«Апология математика»*. – Иж.: НИЦ РХД, 2000, с. 77, 80; Бурбаки Н. *«Очерки по истории математики»*. – М.: ИЛ, 1963, с. 29; Манин Ю.И. *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 16, 128; Подниекс К.М. *«Вокруг теоремы Гёделя»*. – Рига: Зинатне, 1992, с. 7–12; Канке В.А. *«Философия математики, физики, химии, биологии: учебное пособие»*. – М.: КНОРУС, 2011, с. 52–55.

[10] Радлов Э.Л. *«Реализм, в философии»*/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXVII (53). – СПб, 1899.

[11] Гербарт Иоанн Фридрих (1776–1841) – немецкий философ и педагог.

[12] Колубовский Я.Н. *«Гербарт»*/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. VIII (15). – СПб, 1892.

[13] По Парацельсу это – сильфы, саламандры, ундины и гномы.

ему течению блаженного Августина, Ансельма Кентерберийского, Иоанна Скота Эригену, Фому Аквинского и Джона Дунса Скотта.

Идеи современного математического платонизма развёрнуты в автобиографической книге Френкеля[14]. Можно заподозрить, что платонисты не отличают интерсубъективность описания идей от объективности конкретного научного знания, пренебрегая социальными механизмами науки. Математические понятия и теоремы они считают изначально оторванными от природы и взаимодействия людей с нею. Платонизм притязает на объяснение эффективности теоретической науки, но фактически перестал соответствовать современной математике с её альтернативными теориями. Ведь если у всех таковых есть прообразы в мире идей, то какова логика этого мира? Доступен ли он

---

[14] Автор, в частности, пишет: *«я верю в то, что платонический мир математики существует отдельно как от физического, так и от духовного мира. … Платонический мир математики также существует независимо от физической реальности. Например, … аппарат калибровочных теорий изначально был разработан математиками совершенно без оглядки на физику. … Можно привести массу других примеров богатых математических теорий, напрямую не связанных ни с какими объектами физической реальности. … В моём представлении источником безграничных возможностей математического знания служит именно его объективность. Это качество отличает математику от любых других видов человеческой деятельности. Я считаю, что понимание того, на чём основывается это качество, способно пролить свет на глубочайшие тайны физической реальности, сознания и взаимосвязей между ними. Другими словами, чем ближе мы к платоническому миру математики, тем большей способностью мы обладаем для понимания мира вокруг нас и нашего места в нём»*/ Френкель Э.В. *«Любовь и математика. Сердце скрытой реальности»*. – СПб: Питер, 2015, с. 290–292.

рациональному изучению? Если любая идея погружаема туда, как можно её опровергнуть? Не становится ли эта доктрина в итоге сортом иррационализма? И не отражает ли она стремление к абсолютизации предмета своей деятельности, подпитанное авторитетом античной философии? Представим на минуточку, что платонисты рассуждают не о математике, а, к примеру, – об игре в шахматы, или, для большего контраста с математикой, – о футболе. Насколько в этом случае убедительна гипотеза о платоническом мире идеальных правил и достижений, отделённом от физической реальности? Эту аналогию можно оспорить, указав на объективное значение математики для людей, превосходящее все возможные радости от спортивных развлечений. Но тогда мерилом объективности идей окажется польза для человеческой деятельности, нацеленной на контроль избегаемой платонистами природы[15].

Перейдём к *Аристотелю*[16], относившему математику к теоретической философии. Числа и геометрические фигуры он считал результатом абстрагирования свойств чувственно воспринимаемых вещей. По Аристотелю, математика изучает объекты, ограничиваясь количественным аспектом их существования. О математических работах самого Аристотеля ничего не из-

---

[15] Обзор взглядов на платонизм дан в работе философа В.А. Бажанова *«Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия?»*// Вопросы философии, 2014, №5, с. 52–64.

[16] Аристотель (якобы, 384–322 до н.э.) – легендарный древнегреческий философ, ученик Платона. Создал всеобъемлющую систему античной науки, и неслучайно его имя созвучно *αριστο-τέλος* (греч. – наилучшее завершение). Основал школу перипатетиков, продержавшуюся в Европе до XVII в. н.э.

вестно. В его *«Категориях»*, двух *«Аналитиках»* и *«Доказательствах софистов»* изложены начала логики предикатов. Неполная и отчасти противоречивая теория силлогизмов Аристотеля была первым фундаментальным осмыслением научного метода, применимого ко всем областям знания. Логика, как наука о правильных умозаключениях, принадлежала философии. Только в XIX в. родилась символическая, пропозициональная логика, ставшая математической дисциплиной. Но логика Аристотеля продолжает применяться в гуманитарных науках до настоящего времени.

В философии Нового времени видны два подхода к математике, развившихся из рационализма и эмпиризма. В рационализме математика считалась наиболее достоверным основанием всякого знания, тогда как эмпиризм пытался вывести её из опыта.

Декарт[17] полагал, что знание должно опираться на ясное умственное созерцание – интуицию, дающую возможность непосредственного усмотрения истины. Но такое усмотрение возможно лишь для самых простых и фундаментальных понятий, недоступных анализу и редукции. Непосредственно ясным понятием Декарт избрал протяжённость. Геометрия, изучающая протяжённые конфигурации, должна стать фундаментом всех остальных наук, подтверждаемых сведением к протяженности. Возможность геометризации в познании природы Декарт считал безграничной. На этой основе он выстроил основные естественные науки.

[17] Декарт Рене (1596–1650) – выдающийся французский учёный и философ. Его математические работы были тесно связаны с философскими и физическими исследованиями.

Геометрическая интуиция, как созерцание протяжённости, может служить основанием и для самой математики. В книге «*Discours de la méthode*» 1637 г. Декарт первым открыл связь геометрии и алгебры. Числа он определял отношениями величин, а фигуры задавал функциональными уравнениями. Его подход преобладал в естествознании долгое время: так, замечательная книга Исаака Ньютона *«Математические начала натуральной философии»* изложена на геометрическом языке. Попытки возрождения этих идей предпринимал российский математик В.И. Арнольд.

В отличие от Декарта, противопоставившего новую науку традиционной схоластической философии, *Лейбниц*[18] пытался согласовать платонизм и аристотелизм в их средневековой интерпретации с физикой и астрономией Галилея и Кеплера, геометрией Кавальери, анализом Валлиса и Гюйгенса. Лейбниц отверг главный критерий истины Декарта – принцип непосредственной достоверности, считая его психологическим, и потому субъективным[19]. Признавая за очевидностью некоторое значение, Лейбниц стремился к объективной обоснованности. Не частная очевидность, а логичное доказательство может гарантировать объективность и правильность знания. План создания «всеобщей науки» (универсальной характеристики) привлекал его на протяжении всей жизни.

Подобно Декарту, Лейбниц видел образец достоверного знания в математике. Его *«всеобщая наука»*

---

[18] Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий философ, математик, физик, историк, богослов, юрист и дипломат.
[19] Гайденко П.П. *«Г. Лейбниц»*/ Новая философская энциклопедия в 4-х томах, т. 2. – М.: Мысль, 2010.

должна была быть априорной, опираясь на метод, сочетающий комбинаторику (искусство открытия) и аналитику (теорию доказательства). Начала *«всеобщей науки»*, достаточные для получения всех выводимых истин, должны быть получены путём умозрения, а не рассуждения. И тогда всё человеческое знание будет представлено на универсальном символическом языке, подобном алгебре, где вычисление заменит рассуждения и споры. Сведя сложные понятия к простым, можно будет узнать их точное значение. Вопреки Декарту, Лейбниц не считал геометрические аксиомы элементарными. Математику он видел особым случаем логики и стремился свести математические истины к логическим. Высшим логическим принципом Лейбниц считал закон тождества. Тождества недоказуемы и являются аксиомами. Лейбниц предполагал, что все истины эквивалентны, но не всегда очевидным образом. Вослед за Платоном, Лейбниц видел недостаток математических аксиом в их опоре не только на разум, но и на воображение, вследствие чего они не обладают высшей достоверностью. К чистым аналитическим понятиям, сводимым к тождествам, Лейбниц прежде всего относил число. Протяжение, по Декарту неразложимое, согласно Лейбницу является понятием производным. Поэтому содержательность геометрического понятия доказывается не аналитически, а конструктивно, порождением предмета, соответствующего этому понятию. Лейбниц предвосхитил создание математической логики, хотя и не принесшей разрешения всех научных проблем, но давшей важный инструмент современной науки. Его философские идеи просматривается в *гёделевой нумерации*, сводящей логику к арифметике, но результаты Гёделя опровергли мнение Лейбница о тождественности всех истин.

Кант[20] обозначил две проблемы математического знания: обосновать применимость математики в естествознании и определить границы математики и естествознания[21]. Он относил число и величину к априорным формам знания, помимо которых рассудок не может мыслить ни одного явления. Знание природы проявляется в рациональном конструировании объектов. Число и величина задают правила для этого, и любой объект оказывается математическим. Всё в природе измеримо, но сама математика остаётся в сфере чувственности. Её понятия применимы лишь к тому, что доступно непосредственному созерцанию, которое может быть только чувственным. Такой подход к математике не вызывал трудностей пока речь шла о геометрии, алгебре и арифметике XVIII в. Исчисления бесконечно малых Кант почти не касался. Важным примером априорной истины он считал постулат о параллельности из евклидовых «Начал». Обоснование неевклидовой геометрии и изучение психофизиологии мозга вскоре обесценило его систему. Но бесплодные и осмеянные Гауссом[22] истолкования кантовских мне-

---

[20] Кант Иммануил (1724–1804) – основоположник философского критицизма, один из наиболее влиятельных философов Нового времени.

[21] Гутнер Г.Б. *«Философия математики»*/ Новая философская энциклопедия в 4-х томах, т. 4. – М.: Мысль, 2010.

[22] Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) – выдающийся немецкий математик и физик. Отличался основательностью и тщательностью опубликованных работ, а также скромностью при употреблении своего непререкаемого научного влияния. Од-

ний на тему синтетичности или аналитичности математических утверждений традиционно привлекали философов науки XIX в. В XX в. произошла ревизия его теории в виде неокантианства, и *априоризм* продолжает влиять на философию математики[23].

В Новое время, с приростом и обособлением научных дисциплин, стало актуально выяснение специфики предмета и метода математики. Русло таких размышлений задали Декарт и д'Аламбер[24]. Декарт считал математику наукой, исследующей порядок и меру, но его определение было развито математиками только во второй половине XIX века. Даламбер назвал математику наукой о перечисляемых и измеряемых величинах, и его описание предмета стало общепризнанным. В 1843 г. Курно[25], декартизируя образ математики, связал математику с идеями порядка (положения, конфигурации, формы и комбинации) и величины (количества, пропорции и меры). Развитие математики вскоре сблизило эти понятия.

ним из первых негласно оценил достижения Н.И. Лобачевского. Его суждения по широким научным вопросам стали известны из посмертно опубликованной переписки с друзьями.

[23] Перминов В.Я. *«Развитие представлений о надёжности математического доказательства»*. – М.: Едиториал УРСС, 2004, 240 с.

[24] д'Аламбер, или Даламбер Жан ле Рон (1717–1783) – выдающийся математик, философ и просветитель XVIII в. Совместно с Дени Дидро (1713–1784) организовал издание *«Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers»* (в 31 томе, 1751–1777).

[25] Курно Антуан-Огюст (1801–1877) – философ, педагог и экономист, родоначальник математического направления в политической экономии.

Развитие математики в XIX веке и проблема оснований математики. Новые философские споры о математике и переворот представлений о её основах были вызваны теорией множеств и неевклидовой геометрией. *Кантор*[26] стал исследовать множества вещественных чисел, решая классические задачи анализа. Затем Кантор перешёл к изучению абстрактных множеств, описываемых им *«многим, но мыслимым как единое»*. В своей теории он определил мощность множеств, в том числе и бесконечных (строгий аналог количества элементов), и предъявил бесконечную шкалу возможных мощностей. Натуральные числа N стали примером наименьшего бесконечного множества. Равномощные им множества называются счётными, – таковыми оказались целые, рациональные и алгебраические числа. Сначала Кантор пытался доказать счётность вещественных чисел, пока не придумал процедуру – диагональный процесс[27], – опровергающую

[26] Кантор Георг (1845–1918) – выдающийся немецкий математик. Заложил теорию бесконечных множеств и трансфинитных чисел; сформулировал понятие мощности множества; доказал несчётность действительных чисел, установив существование разных бесконечностей.

[27] Правомерность метода Кантора не была признана сразу. Так, на Парижском математическом конгрессе 1900 г. было предложено доказательство счётности отрезка, опровергнутое лишь через несколько лет. Но на том же конгрессе Гильберт указал 23 проблемы, решение которых определит развитие математики XX в. Первой из них была *континуум-гипотеза Кантора*. Теорию множеств Гильберт называл *«Канторовым раем»*, хотя в ней обнаруживалось всё больше парадоксов, причина которых была неясна. Вскоре осознали, что противоречия возникают при собирании множеств из элементов определённой природы. У множеств такого рода (например, множества всех множеств) могут быть парадоксальные свойства.

счётность вещественного отрезка[28]. Метод Кантора обогатил классическую математику, вскрыв ранее не-

---

Другой источник противоречий, впервые указанный Анри Пуанкаре, – самоотнесение понятий (непредикативность) при определении множеств. Проблемы такого типа снимаются погружением множеств в универсум, их фундированием или запретом самоотнесения понятий. Но тогда обедняется классическая математика, использующая непредикативные определения. Решения проблемы вне логической формализации теории множеств не было видно. Введённые Кантором множества вошли в фундамент математики, возродив её единство. Но теоретико-множественные противоречия обесценивали всю математику, поскольку самопротиворечивое утверждение допускает произвольные импликации. Первая аксиоматизация теории множеств была проведена Э.Г. Муром в 1905 г. Другие теории множеств без начальных парадоксов (т.н. *«стандартные»*) были построены Цермело, Расселом, Френкелем, Сколемом, Нейманом, Бернайсом, Гёделем, Куайном. Этих парадоксов также нет в неклассических логиках (паранепротиворечивых или в интуиционизме). Гёдель доказал недоказуемость непротиворечивости стандартных теорий множеств. Ранее Колмогоров доказал, что интуиционизм не избегает возможных парадоксов стандартной теории множеств. Теорию множеств Кантора именуют *«наивной»* или считают *«учением»* без теоретического статуса. Но она успешно применяется в алгебре и анализе при зафиксированном универсуме множеств. Первым в России теорией множеств занимался профессор Московского университета Б.К. Млодзеевский. В полной мере аксиоматические теории множеств востребованы в *общей топологии*, созданной советскими математиками П.С. Урысоном и П.С. Александровым на базе топологических теорий Вейерштрасса-Кантора и Хаусдорфа-Брауэра.

[28] Конструкция Кантора дала пример следующей после счётности мощности – *континуума*. Обобщив неравенство $2^n > n$, Кантор доказал, что множество $P(M)$ всех подмножеств M мощнее самого M, что позволило ему указать счётную шкалу мощностей – $|N|$, $|P(N)|$, $|P(P(N))|$ и т.д. Кантор размышлял о существовании мощностей между $|M|$ и $|P(M)|$, в частности – между счётностью и континуумом. Без успеха он пытался доказать их отсутствие. Его гипотеза оказалась первым содер-

замечаемые противоречия. Теоретико-множественные парадоксы привели к серьёзной аберрации философии науки. В итоге, задачу обоснования математики стали связывать исключительно с историческими способами разрешения парадоксов бесконечности (интуиционизмом, конструктивизмом, логицизмом, формализмом)[29], пренебрегая иными онтологическими и гносеологическими проблемами.

Необходимость обоснования математических методов была осознана после признания в XIX в. неевклидовой геометрии Лобачевского[30]. Непротиворечивость её была доказана конструктивным методом, указанным в *«Началах»* Евклида. Неожиданным было лишь применение метода не к отдельному объекту, а к целой теории. Правомерность такого перенесения была признана не сразу. Но неявно так же издавна обосновывались другие неевклидовые геометрии – сферическая, применяемая в астрономии, и проективная, изучаемая художниками и геодезистами. Практиче-

---

жательным утверждением, независимым от стандартных теоретико-множественных аксиом. Неопровержимость её доказал К. Гёдель, а недоказуемость – П. Коэн./ Манин Ю.И. *«Доказуемое и недоказуемое, гл. III»*. – М.: Радио и связь, 1979.

[29] Светлов В.А. *«Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия»*. – М.: КомКнига, 2006, 208 с.

[30] Лобачевский Николай Иванович (1792–1856) – великий русский учёный, организатор науки, творец неевклидовой геометрии. Непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана разными методами – Г.Ф.Б. Риманом (1854), Э. Бельтрами (1863), Ф.Х. Клейном (1872) и А. Пуанкаре (1882). Попытки её обоснования поставили вопрос о непротиворечивости других математических теорий, что необходимо для их содержательности, ведь иначе в них теряется различие между истиной и ложью.

ская польза от них заслонила необходимость их строгого логического обоснования. Геометрия Лобачевского, напротив, поначалу поселилась лишь в мыслях её создателя. Сомнения в её согласованности имели логические основания. Какой-то пользы, кроме лишних хлопот, другие математики от неё не ждали. И это питало недоверие к ней[31]. Лобачевский не дождался признания своей геометрии. Бельтрами[32] в 1863 г. построил её локальную евклидову модель. Клейн[33] в 1872 г. и

---

[31] Так, выдающийся русский математик, академик Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862) приложил немало усилий, чтобы математические труды Лобачевского не получили заслуженного признания. Его негативное влияние в этой области сохранялось долгое время после кончины обоих учёных, в особенности – в Петербургской математической школе, где Остроградский был одним из основателей. Вот как он отозвался о работе Лобачевского *«О началах геометрии»* в 1832 году: *«Всё, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного. Всё, что я не понял, было, по-видимому, плохо изложено по той же самой причине, что в нём трудно разобраться. Из этого я заключаю, что книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, что она небрежно изложена и что, следовательно, она не заслуживает внимания Академии»*. Причины острой неприязни Остроградского к Лобачевскому до сих пор не установлены.

[32] Бельтрами Эудженио (1835–1900) – итальянский математик, установивший, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны (т.н. псевдосфере Бельтрами) геометрия Лобачевского реализуется локально. *«Опыт истолкования неевклидовой геометрии»* (1863) стал важным аргументом в пользу логической непротиворечивости теории Лобачевского.

[33] Клейн Феликс Христиан (1849–1925) – немецкий математик. Свои геометрические идеи изложил в *«Сравнительном рассмотрении новых геометрических исследований»* (1872), также известном как *«Эрлангенская программа»*. По Клейну, каждая геометрия является теорией инвариантов особой группы преобразований. Выбор группы определяет геометрию. Клейн доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского.

Пуанкаре[34] в 1882 г. окончательно свели геометрию Лобачевского к планиметрии Евклида. И лишь тогда возник вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида, которым ранее никто не задавался. Его решил Гильберт[35] в 1899 г., сведя геометрию к вещественной арифметике. Он поставил задачу обоснования арифметики. Но исследования Гёделя[36] дали неожиданный результат – искомое доказательство в рамках самой арифметики не существует.

Математика рубежа XIX–XX вв. переживала качественную эволюцию. Этот процесс выявил проблему достоверности математических методов и теорий, поставил задачу переосмысления её оснований. Во второй половине XIX в. начал создаваться современный аксиоматический метод математики, сначала затронувший арифметику и геометрию. В геометрии ранее прочих дисциплин началось дедуктивное построение теории из основных положений, связанное с работами Евклида и европейских математиков эпохи Возрождения. Карл Георг Штаудт (1798–1867) в 1840–50-х гг.

---

[34] Пуанкаре Анри (1854–1912) – выдающийся французский математик, физик и философ науки, основоположник конвенционализма. В 1882 дал новую интерпретацию геометрии Лобачевского через теорию автоморфных функций.

[35] Гильберт Давид (1862–1943) – выдающийся немецкий математик. Его исследования оказали огромное влияние на многие разделы математики: алгебру, теорию чисел, геометрию, вариационное исчисление, теорию интегральных уравнений, математическую физику, логику и метаматематику.

[36] Гёдель Курт (1906–1978) – замечательный австрийский математик. Участник Венского неопозитивистского кружка. Занимался логикой и теорией множеств. Опроверг традиционные представления о логических основаниях математики. Сообщают, что он неоднозначно относился к своим открытиям.

пытался создать аксиоматику вещественной и комплексной проективной геометрии. Мориц Паш (1843–1930) во второй половине XIX в. предложил первую полную аксиоматику евклидовой геометрии. Давид Гильберт в *«Основаниях геометрии»* 1899 г. построил полную аксиоматическую систему евклидовой геометрии. Он классифицировал её аксиомы и очертил пределы каждой из них, исследовав различные «геометрии», получающиеся при изменении некоторых аксиом. Аксиомы натурального ряда предложил в самом конце XIX в. Джузеппе Пеано (1858–1932). Следующими аксиоматизированными разделами математики стали алгебра, топология и теория множеств. На этом пути выявились новые проблемы и области исследования, вполне осознанные позднее затронутого периода.

Осознание происходящего научного переворота побуждало интерес к философии математики. На Втором Международном конгрессе математиков (Париж, 6–12 августа 1900 г.) были секции, посвящённые проблемам истории и философии науки. Так, возглавляемая принцем Роландом Бонапартом секция V занималась *«Историей и библиографией математики»*, а секция VI под председательством профессора Морица Кантора – *«Преподаванием и методологией математики»*. На совместном заседании этих секций 8 августа Гильберт выступил с *«Математическими проблемами»*, определившими развитие математики XX в.

Философская подоплёка доклада Гильберта была в следующем. Современная история показывает непрерывное развитие науки. Каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми. Научная область жизнеспособна, пока в ней есть изобилие нерешённых проблем. Недостаток их означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Плодотворная математическая проблема должна быть достаточно трудной, чтобы привлечь к себе способных учёных, но в то же время не совсем недостижимой, чтобы приложенные к ней усилия не оказались тщетными на данном этапе развития дисциплины. Решение задачи, по Гильберту, должно быть произведено из конечного числа точно сформулированных предпосылок, а логические дедукции должны производиться посредством конечного числа заключений. Это финитарное понимание строгости проведённых доказательств легло в гильбертову программу обоснования математики. Гильберт также указал действенный (но, конечно же, не алгоритмизируемый) метод решения математических задач.

Безупречная строгость рассуждений соответствует общей философской потребности разума в правильном мышлении. Корректные математические методы являются одновременно простыми и наиболее доступными для понимания. Тёмное и причудливое теоретизирование легко становится источником заблуждений. Поэтому в математике правильность рассуждения сливается с его ясностью и специфической красотой, воспринимаемой на эстетическом уровне. Запутанность же сродни уродству. Стремление к строгости мысли заставляет математика искать вразумительные и прозрачные доказательства. Причина неуспеха при решении задачи обычно лежит в непонимании простых частных случаев и отсутствии достаточно общей точки зрения, с которой рассматриваемый вопрос становится отдельным звеном в цепи сходных проблем. Обнаружение этой точки зрения позволяет решить вместе с избранной задачей многие иные, родственные ей.

Гильберт озвучил в докладе общую на то время убеждённость в разрешимости всякой содержательной математической задачи. Он верил в целостность математики, которая не должна стать узко дифференцированным знанием: «*перед нами встаёт вопрос, предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадётся ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет становиться всё меньше. Я не верю в это и не хочу этого. Математическая наука, на мой взгляд, представляет неделимое целое, организм, жизнеспособность которого обуславливается связанностью его частей. Ведь при всём различии математического материала в частностях мы всё же очень ясно видим тождественность логических вспомогательных средств, родство образования идей в математике в целом и многочисленные аналогии в её различных областях*»[37].

Гильберт застал крушение идеала классической науки и своей логической программы, не сумев принять новые результаты. Позднее математики осознали, что с потерей категоричности их наука стала ещё более интересной и важной для человечества. В ней более явственно проявились метафизические глубины, изначально заложенные в ней и впоследствии скрытые

---

[37] Гильберт Д. *«Избранные труды. Т. 2.: Анализ. Физика. Проблемы»*. – М.: Факториал, 1998, с. 435.

за впечатляющими успехами. Однако мало кто подозревал об этом на рубеже XIX–XX вв.

Основные течения философии математики. Исторически, первым возник *логицизм*, сводящий математические дисциплины к логике посредством дифинициарных расширений. Некоторые философы назначают Канта в родоначальники логицизма[38], будто бы вытекающего из кантовского представления об априорном характере логики и математики. Такое суждение видится анахроничным и неточным, поскольку создание этой системы хотя и произошло под влиянием кантовских идей, но в полемике с ними.

Достоверное рождение логицизма можно связать с сочинением Фреге[39] *«Основания арифметики»*[40] 1884 г. В 85-86 параграфах книги автор соглашается с Канторовой теорией множеств, признавая аксиоматическую обоснованность актуальной бесконечности, но указывая на неразработанность метода полного упорядочения. Интуиция Фреге в этом вопросе оказалась глубокой. Позднее выяснилось, что для полного упоря-

---

[38] Непейвода Н.Н. *«Логицизм»*/ Энциклопедия эпистемологии и философии науки. − М.: Канон+, 2009, с. 447.

[39] Фреге Готлоб Фридрих Людвиг (1848–1925) – немецкий математик. Создал систему символической логики, обосновал средствами логики арифметику. Определил логические функции, выразив через них все отношения математической логики. Первым в явной форме ввёл в математическую логику кванторы и систематически использовал их. Ему принадлежит первая дедуктивно–аксиоматическая система исчисления высказываний. Был противником формализма в математике.

[40] Фреге Г. *«Основоположения арифметики. Логико-математическое исследование о понятии числа»*/ Фреге Г. *«Логико-философские труды»*. − Новосибирск: Сибирское университетское изд-во, 2008, с. 125−288.

дочения необходима аксиома выбора Цермело[41], независимая от других аксиом.

Помимо признания актуальной бесконечности теории Кантора и Фреге методологически объединялись прямой связью множеств с понятиями. По Фреге, понятия полностью характеризовались своими объёмами, а по Кантору, всякое множество могло быть собрано из элементов с некоторыми свойствами правильной логической природы. Рассел[42] сообщил Кантору и Фреге о противоречивости этого принципа. Его примеры парадоксального предиката и множества были построены по образцу «диагональной процедуры» Кантора. Наступила стадия математических парадоксов. В замешательстве Фреге и Кантор отказались от развития своих теорий. Последовательный противник логицизма Пуанкаре предположил, что источником парадоксов является прямое или косвенное самоотнесение используемых понятий, которые поэтому не являются правильными предикатами и не определяются своими объёмами. Другой выход из кризиса указали

---

[41] Цермело Эрнест Фридрих (1871–1953) – немецкий математик. Аксиоматизировал теорию множеств. В 1904 доказал гипотезу Кантора о полном упорядочении, теперь именующуюся теоремой Цермело. Для этого ввёл аксиому выбора: *«Для множества, образованного из множеств без общих элементов, можно образовать новое множество, имеющее с вышеупомянутыми множествами ровно по одному общему элементу»*.

[42] Рассел Бертран (1872–1970) – английский математик, философ и общественный деятель. Пытался устранить парадоксы теории множеств и математической логики построением теории типов. Рассел и Уайтхед уточнили общую логическую и понятийную основу математики. Развив идеи Лейбница и Фреге, Рассел стал одним из основателей логицизма.

Рассел и его учитель Уайтхед[43]. В трёхтомной монографии *«Principia Mathematica»* 1910–13 гг., общим объёмом около 2000 страниц, они создали иерархическую *теорию типов*, согласно которой множество относится к более высокому типу, чем его элементы. При усовершенствовании этого принципа, – в разветвлённой иерархии типов, – исключаются автореференции при собирании множеств. В четвёртом ненаписанном томе книги планировалось обоснование геометрии.

Сочинение Рассела и Уайтхеда значительно повлияло на развитие современной логики, теории множеств и теории доказательств, хотя полное сведение классической математики к логике или теории множеств не состоялось. Вскоре после выхода книги Рассел отказался от последовательного логицизма, признав, что геометрия и даже сама логика не сводимы к логике, а зависят от эмпирического фундамента. В классической математике продолжается использование непредикативных определений. Так, Вейль указал несводимость к теории типов точных граней подмножеств вещественных чисел[44].

К логицизму относят аксиоматизацию арифметики Дедекинда (1888) и Пеано (1891), алгебру логики Кутюра (1904), логику высших порядков Хвистека (1921), кумулятивную теорию типов Рамсея (1926), нестандартную аксиоматическую теорию множеств Ку-

[43] Уайтхед Альфред Норт (1861–1947) – английский математик и философ. Работал в области математической логики и философии математики.

[44] Вейль Г. *«О философии математики. Сборник работ».* – М.-Л.: ГТТИ, 1934, с. 20.

айна *NF* (1951), абстрактную теорию множеств Френкеля (1953), λ-исчисление Карри (1963) и др.

Дедекинд[45] предполагал, что арифметика не зависит от опыта, а свойства чисел выводятся из законов логики. Арифметика базируется «*на способности духа относить вещи к вещам, устанавливать соответствие между одной вещью и другой или же отображать одну вещь через другую*». Сущность чисел сводится к их местоположению в ряду подобных. Наука о числах рассматривает лишь отношения между ними, сами же элементы, обозначаемые числами, не имеют значения. Рассел способствовал популяризации взгляда, что предмет математики – операции как таковые, независимо от предметов, к которым они могут прилагаться. Чистая математика представлялась ему системой формальных выводов, независимых от содержания: «*Чистая математика состоит из утверждений следующего типа: если такое-то предложение верно по отношению к чему бы то ни было, то такое-то другое предложение верно также по отношению к этому чему-то. Ни вопрос о том, верно ли первое предложение, ни вопрос о том, что такое то, по отношению к которому это предложение верно, не касается чистой математики; оба эти вопроса принадлежат к области математики прикладной. В чистой математике мы исходим из известных правил вывода, благодаря которым мы можем вывести, что если одно предложение верно, то верно и не-*

---

[45] Дедекинд Рихард Юлиус Вильгельм (1831–1916) – немецкий математик. Заложил основы современной высшей алгебры, изучающей произвольные поля, кольца, группы и модули. В ходе работ по теории идеалов Дедекинд пришёл к рассмотрению понятия упорядоченного множества в более общей форме, чем у Кантора. Одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории вещественных чисел.

которое другое. Эти правила вывода составляют начала формальной логики. Затем мы избираем гипотезу, которая кажется правдоподобною и выводим её следствия. Если наша гипотеза относится не к одной или нескольким частным вещам, но к чему бы то ни было, то наши выводы составляют математику. Таким образом, математика может быть определена, как доктрина, в которой мы никогда не знаем, ни о чём говорим, ни того, что истинно ли то, что мы говорим»[46]. С этим согласны многие математики.

Следующими разработанными течениями философии математики стали *формализм* и *интуиционизм*, возникшие примерно в одно время и под взаимным влиянием. Между декларациями этих программ, их признанием и разработкой лежат немалые временные разрывы, поэтому сложно разобраться в приоритете какой-то из них.

Возникновение интуиционизма связывают с докторской диссертацией голландского математика Лейтзена Эгберта Яна Брауэра *«Об основаниях знания»* 1907 г., выполненной в Амстердамском университете под руководством механика Д.И. Кортевега. Но ей предшествовало несколько работ Брауэра на близкую тему, вышедших со времени защиты им магистерской диссертации в 1904 г., в частности, – книги 1905 г. *«Жизнь, искусство и мистика»*. На оригинальные убеждения Брауэра повлиял математик-самоучка Г. Маннури[47], из бухгалтера ставший приват-доцентом и профессором Амстердамского университета. Он при-

---

[46] Рассел Б. *«Новейшие работы о началах математики»*// Новые идеи математики. Сб. № 1. – Петроград, 1917, с. 82–83.

[47] van Atten M. *«Luitzen Egbertus Jan Brouwer»*/ The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition).

нёс в Голландию идеи топологии и символической логики, увлекался психоанализом и политикой. В философии математики он держался редкого экзистенциального голландского направления – *сигнифики*[48]. В 1908 г. Брауэр опубликовал статью *«Недостоверность логических принципов»*, где оспорил закон исключённого третьего. Тогда же на Четвёртом Международном конгрессе математиков в Риме он заявил о своей позиции. Но без научного признания Брауэр не мог рассчитывать на серьёзное отношение к своей радикальной теории, отбрасывающей значительную часть достижений математики. Он занялся топологией и скоро получил важные результаты, доказав существование неподвижной точки при непрерывном отображении трёхмерного шара в себя (1909), топологическую инвариантность размерности (1911) и др.

Заслужив бесспорный авторитет в науке, став Нидерландским академиком и членом многих научных обществ, Брауэр приступил к созданию неклассического направления в математике, от которого уже не отступал. Термины «формализм» и «интуиционизм» впервые заявлены им в 1911 г. в обзоре книги Маннури *«Методологические и философские замечания об элементарной математике»* 1909 г. Открытая профессорская лекция Брауэра 1912 г. называлась *«Intuitionisme en Formalisme»*. Перепечатанная в Бюллетене AMS 1913 г., она стала первой интуиционистской публикацией на английском языке. До 1951 г. Брауэр работал в Амстердамском университете, отклоняя

---

[48] Френкель А.А., Бар-Хиллел И. *«Основания теории множеств»*. – М.: Мир, 1966, с. 248.

иные приглашения. Он разработал ряд интуиционистских математических курсов, отказываясь от научного сотрудничества в классических направлениях.

Брауэр основал голландскую интуиционистскую школу, в которой состояли около 400 математиков многих дисциплин: от топологии и логики – до программирования и философии науки. Среди них: М.И. Белифанте, А. Гейтинг, Д. ван Дален, Д. ван Данциг, Ф. Лёнстра, Б. де Лоор, А.С. Трулстра, Г. Фрейденталь.

Философские взгляды Брауэра, иногда напористое их продвижение, с конца 1920-х гг. рассорили его с Гильбертом и другими ведущими математиками Европы. После 1945 г. под предлогом денацификации его скомпрометировали и в голландской науке.

Брауэр считал, что математика априорна и несводима к опыту, логике или языку, – это не теория, а существенная часть человеческой деятельности, связанной с выделением отдельных восприятий. Он придерживался когерентной теории истины, считая, что правильность математических рассуждений определяется интуитивно ощущаемой согласованностью всего теоретического построения. В венском докладе 1929 г. Брауэр обозначил свою философскую позицию в более определённой форме, – он не признавал объективность пространственно-временного мира и его причинно-следственных связей, считая их продуктом совокупной воли человечества.

Своими идейными предшественниками Брауэр считал Кронекера[49], Пуанкаре и Бореля[50], представ-

---

[49] Кронекер Леопольд (1823–1891) – немецкий математик, сторонник арифметизации математики. Предполагал, что только

лявших интуитивное направление в математике. Интуитивисты не создали собственной философской системы, ограничиваясь остроумной критикой новых математических методов, к появлению которых имели непосредственное отношение. Будучи выдающимися учёными, они привлекли внимание к своим идеям за пределами своей дисциплины. Пуанкаре даже удостоился ленинской критики[51] за *«субъективистские выверты»* конвенционализма, будучи назван *«сбивчивым и непоследовательным писателем»*, *«мелким философом»*, *«мыслящим только бессмыслицу»* идеалистом и релятивистом. По другой систематизации[52] интуитивистов именуют интуиционистами, а последователей Брауэра называют *неоинтуиционистами*.

Интуитивистов объединяло мнение о бессмысленности теорем о существовании объектов, не дающих способов их построения. А таких теорем в математике XIX в. накопилось немало, например, – в вещественном анализе Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Неэффективные теоремы ещё ранее прописались в алгебре, – таким является утверждение о существовании комплексного корня числового многочлена. Беспокой-

---

арифметика обладает подлинной реальностью. Основные работы относятся к алгебре и теории чисел.

50 Борель Феликс Эмиль (1871–1956) – французский математик, первым обратил внимание на важность идей Кантора и применил их к учению о функциях. Выступал против логического формализма.

51 Ленин В.И. *«Материализм и эмпириокритицизм»*/ Ленин В.И. *ПСС, изд. 5, т. 18*. – М.: ИПЛ, 1968, с. 48, 171, 279, 311, 328 и др.

52 Френкель А.А., Бар-Хиллел И. *«Основания теории множеств»*. – М.: Мир, 1966, с. 243–244.

ство математиков этим обстоятельством выражалось во множестве попыток передоказательства, в активных исследованиях на тему нахождения или локализации корней и в игнорировании комплексных чисел (например, в окружении Чебышева[53]). Потрясение алгебраического сообщества вызвала неконструктивная теорема Гильберта о конечности инвариантов. Проблема инвариантов была эффективно решена в 1868 г. эрлангенским математиком П.А. Горданом в частном случае. В этой теме не было значительного продвижения до 1888 г., когда Гильберт решил её для всех рассматриваемых тогда случаев. Предварительно Гильберт доказал свои знаменитые теоремы о конечности базиса и о нулях. Он сообщил о решении проблемы алгебраическому патриарху Артуру Кэли, поначалу принявшему результат за план ещё не сделанной работы[54]. Против метода Гильберта возражали Гордан и Кронекер. Рассуждение Гильберта при этом не было чистой теоремой существования. Для каждого конкретного случая на его пути можно построить конечный базис идеала кольца многочленов и базис системы инвариантов. Его идею позднее прояснила Эмми Нётер.

По-настоящему неэффективные теоремы существования вытекают из принципа исключённого третье-

---

[53] Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894) – математик и механик, выпускник Московского университета (1841). Создатель петербургской математической школы, академик Петербургской, Парижской, Шведской, Берлинской, Болонской академий и почётный член многих русских и иностранных университетов и научных обществ. Автор более 70 научных работ по теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций, интегрального исчисления и теории механизмов.

[54] Рид К. *«Гильберт»*. – М.: Наука, 1977, с. 48–49.

го, ставшего главным объектом критики интуитивистов. Другими предметами их нападок были актуальные бесконечности и аксиома выбора. Избавление математики от этого триединого зла, по мнению интуитивистов, снимает все противоречия и парадоксальные конструкции, делая доказательства интуитивно ясными. Интуиции они придают объективное, априорное, интуитивно понятное значение. То, что при последовательном применении такого подхода пропадёт значительная часть полезных математических достижений, не считается важным.

Брауэр не интересовался логикой как таковой, но под влиянием критики обратился к логическому оформлению своей теории. Первую кодификацию интуиционистской логики в 1930 г. построил его ученик Аренд Гейтинг. Язык интуиционистской логики таков же, как и в логике классической. Различие их проявляется в законах и интерпретациях операций[55]. Эта система не рассматривается как исчерпывающая и окончательная, – интуиционисты уверены, что таковой вообще не может быть.

Интуиционисты не интересуются проблемой парадоксов, – антиномии для них являются бессмысленными сочетаниями слов, не заслуживающими раздумий. В интуиционистской логике не любое высказывание имеет истинностное значение. Суждения, заявляющие о неконкретной возможности чего-то, считаются слишком абстрактными для этого. Принцип исключённого третьего применим без дополнительного исследования лишь к объектам конечной природы. Это

[55] Гейтинг А. *«Интуиционизм»*. – М.: Мир, 1965, с. 122–142.

следует из интуиционистского понимания логических операций: истинность конъюнкции требует конструктивного доказательства всех входящих операндов, а дизъюнкции – хотя бы одного из них, но вполне определённого. Эти операции особенно проблематичны по отношению к бесконечным множествам, не допускающим законченного исчерпывающего исследования. Поэтому к ним не всегда применимы экзистенциальные и всеобщие утверждения, сводимые к дизъюнкциям и конъюнкциям соответственно. Это суждение ранее высказывал Аристотель: *«Если бесконечное, поскольку оно бесконечно, непознаваемо, то бесконечное по количеству или величине непознаваемо, сколь оно велико, а бесконечное по виду непознаваемо, каково оно по качеству»*[56].

В интуиционистской логике также отсутствует снятие двойного отрицания, связки и кванторы оказываются независимыми и не сводятся друг к другу, как в логике классической. Интуиционистскую логику можно мыслить логикой принципиальной вычислимости. Колмогоров[57] в 1931 г. интерпретировал интуи-

[56] Аристотель *«Физика, кн. 1, гл. 4»*/ Аристотель *«Сочинения в 4-х томах. Т. 3»*. – М.: Мысль, 1981, с. 69.

[57] Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – выдающийся советский математик, академик, один из лидеров Московской математической школы. В 1922 построил ряд Фурье, расходящийся почти всюду. Эта работа принесла ему мировую известность. Первые публикации Колмогорова были посвящены проблемам дескриптивной и метрической теории функций. Не принадлежа ни одному из направлений, участвовал в дискуссиях между формально-аксиоматическим течением Гильберта и интуиционистским Брауэра и Вейля. В 1925 доказал, что классическая логика погружается в интуиционистскую, и поэтому интуиционизм наследует все возможные противоречия формализма и в этом отношении не имеет никаких преиму-

ционистскую логику как исчисление задач. Логические переменные здесь считаются задачами, связки – преобразованиями задач, а доказательства – сведением новых задач к задачам, решённым ранее или принятым за таковые. Тарский[58] в 1938 г. предложил многозначную интерпретацию интуиционистской логики. Клини[59] в 1945 г. построил интерпретацию интуиционистской логики в логике классической.

Отрицая актуальные бесконечности, интуиционисты признают бесконечные множества в потенциальном смысле, как *«свободно становящиеся последовательности»*, генерируемые какой-то процедурой, – например, алгоритмом или физическим датчиком. Континуум они рассматривают как *«среду свободного ста-*

ществ. Внёс существенный вклад в теорию функций, теорию вероятностей, теорию стационарных случайных процессов, теорию гамильтоновых систем и другие области математики. Построил свою версию аксиоматического обоснования теории вероятностей (1933). В 1930 стал профессором МГУ, в 1933–39 был ректором Института математики и механики МГУ, многие годы руководил кафедрой теории вероятностей и лабораторией статистических методов. В 1935 получил степень доктора физико-математических наук, в 1939 был избран членом АН СССР. В 1941 Колмогорову и Хинчину за работы по теории вероятностей была присуждена Государственная (Сталинская) премия. Был президентом Московского математического общества (1964–1966, 1973–1985).

[58] Тарский Альфред (1901–1983) – замечательный польско-американский математик, один из лидеров Венского неопозитивистского кружка последнего периода. Работал в математической логике, основаниях математики и семиотике.

[59] Клини Стивен Коул (1909–1994) – крупный американский математик. Автор работ по математической логике, теории вычислимости, теории автоматов, интуиционизму и метаматематике. Был президентом Международного союза истории и философии науки.

новления». Первым теорию интуиционистского континуума построил ученик Гильберта Вейль[60] в 1918 г., брауэрова версия изложена Гейтингом в 1956 г., другую предложил в докторской диссертации ученик Клини Ричард Весли[61] в 1962 г. Указывают, что некоторые конструкции Брауэра неявно используют актуальную бесконечность. Интуиционисты допускают исследование бесконечных совокупностей методом полной индукции или мысленным экспериментом. Неперечислимых бесконечностей у них не встречается.

Выводы интуиционистской математики далеки от классических. Интуитивистские функции не имеют разрывов и, будучи заданы на вещественном отрезке, являются там равномерно непрерывными, достигают верхней и нижней грани, но могут не принимать промежуточных значений. Здесь существуют несравнимые вещественные числа, а монотонная ограниченная последовательность не обязательно сходится.

К достоинствам интуиционизма относят позитивное использование и логическую формализацию незнания. Он стимулировал логические и алгоритмические исследования, породив множество логических теорий с неклассическими законами[62].

---

[60] Вейль Герман (1885–1955) – замечательный немецкий математик, физик и философ науки. Успешно занимался теорией функций, дифференциальными и интегральными уравнениями, теорией чисел, теорией представлений групп, дифференциальной геометрией, квантовой механикой и др.

[61] Клини С., Весли Р. *«Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций»*. – М.: Наука, 1978, с. 184–238.

[62] Среди таких систем упоминаются *слабая интерпретация* Д. ван Данцига, *минимальное исчисление* И. Иоганссона и *безотрицательная математика* Г.Ф.К. Грисса и П.К. Гилмора.

На Третьем Международном математическом конгрессе в Гейдельберге 1904 г. Гильберт представил теорию доказательств, созданную для реализации его программы обоснования математики, – *формализма*. Но последовательное развитие теории он начал только в 1917 г. Свои результаты Гильберт представил в *«Основаниях математики»* 1930 г. Он предложил аксиоматически перестроить всю математику, доказав непротиворечивость получившейся формальной системы, её полноту и категоричность. Полнота означает доказуемость любого истинного утверждения, в частности, – для каждого содержательного высказывания либо оно само, либо его отрицание должно быть выводимо из аксиом. Категоричность утверждает изоморфность всех моделей с заданными аксиомами.

План Гильберта был грандиозен, и казался необходимым для очищения математики от противоречий. Ведь другие программы – *логицизма*, редуцирующего математику к логике, и *интуиционизма*, ограничивающего математику конструктивными методами, не были удовлетворительными. Они отбрасывали многие фундаментальные математические достижения. Гильберт нашёл серединный путь между ними. Новая дисциплина должна была изучать математические теории, оказавшись за пределами классической математики. Поэтому Гильберт назвал её *«метаматематикой»*[63].

Для прояснения особенности гильбертовой программы учтём, что большая часть математики возникла генетически, конструктивно и зачастую – на интуитивном уровне. И также прежде воспринималась ис-

---

[63] греческое слово μετα означает «за, между, после».

тинность математических утверждений. До обнаружения парадоксов теории множеств никто не подозревал, что правильные математические высказывания могут оказаться противоречивыми. Для исправления этой ситуации Гильберт заменил понятие истинности утверждения его совместимостью с аксиомами теории, то есть, – непротиворечивостью их объединённой логической системы. Ранее важный урок геометрии Лобачевского состоял в доказательстве её непротиворечивости погружением в геометрию Евклида, эвристически более достоверную. Непротиворечивость геометрии Евклида Гильберт доказал сведением к вещественной арифметике. Но для арифметики и теории множеств такой редукции не ожидалось. Ведь неизвестны более простые и фундаментальные теории, кроме их же конечных интерпретаций и самой логики. Тогда Гильберт создал дедуктивный метод доказательства непротиворечивости теорий.

Он собирался обосновывать всё естествознание, всю классическую математику, в том числе и анализ, существенно опирающийся на экзистенциальные бесконечности. Одновременно он признавал конструктивистское замечание об отсутствии интуитивной ясности такой бесконечности и необоснованности логических операций с ней, выработанных на практике конечных совокупностей.

Гильберт предложил рассматривать предложения об актуальных бесконечностях как идеальные, возможно не имеющие содержательного смысла, но подчиняющиеся той же логике, что и содержательные, непосредственно проверяемые суждения. Все теоремы гильбертовой метаматематики доказываются финитными и конструктивными методами, без прямого упоминания актуальной бесконечности. В такой теории содержательные предложения могут иметь простые доказательства с использованием идеальных предложений за счёт непротиворечивости системы, как это получается в проективной геометрии после присоединения бесконечно удалённых точек, или в комплексном анализе после добавления мнимой единицы[64]. Гильберта также интересовали критерии простоты доказательства, позднее осуществлённые в понятиях колмогоровской и марковской сложности.

Оказалось, что логическая программа Гильберта невыполнима в полном объёме. Первыми *«ограничительными»* результатами были доказательства Гёделем в 1930 г. неполноты непротиворечивой системы, содержащей арифметику, и отсутствия доказательства её непротиворечивости. Эти утверждения применимы к самой арифметике и аксиоматической теории множеств. В 1936 г. Генцен предложил метод доказательства непротиворечивости арифметики, выходящий за рамки формальной арифметики первого порядка.

Теорему Гёделя в 1936 г. усилил Россер, в 1939 г. – Тарский, в 1952 г. – Мостовский. Наглядной иллюстрацией неполноты аксиоматической теории множеств стало доказательство независимости континуум-гипотезы от аксиом ZFC, по частям выполненное Гёделем и Полом Коэном (1938, 1963).

---

[64] Гильберт Д. *«Логические основания математики»*/ Гильберт Д. *«Избранные труды. Т. I»*. – М.: Факториал, 1998, с. 426.

В 1936 г. Чёрч доказал неразрешимость относительно доказуемости арифметики первого порядка. Тогда же Россер доказал неразрешимость любого непротиворечивого расширения этой системы. Неразрешимыми оказались теории групп, колец, полей, структур, колец и др. В 1956 г. Тарский доказал неопределимость истинности в достаточно большой непротиворечивой системе[65].

К концу 1960-х гг. стало ясно, что цели, поставленные логицизмом, формализмом и интуиционизмом, не достигнуты, хотя и были получены важные результаты в математической логике и основаниях математики. Успехи оказались в большей степени логико-математическими, чем философскими. Интерес к породившей их проблеме обоснования математики стал уменьшаться, переместившись на эпистемологические проблемы математического знания.

[65] Френкель А.А., Бар-Хиллел И. *«Основания теории множеств».* – М.: Мир, 1966, с. 364–378.

ОТ ПОЗИТИВИЗМА К ФОРМАЛИЗМУ И КОНВЕНЦИОНАЛИЗМУ В РОССИИ

Позитивистский подход В.В. Бобынина. В отечественном математическом сообществе в XIX в. единства понимания образа математики не было. *Позитивистский взгляд* на сущность математики в конце 1890-х гг. передал историк науки *Виктор Викторович Бобынин* (1849–1919)[66]. Несмотря на колоссальную работу в области истории математики, его влияние на отечественных математиков было невелико. После защиты диссертации в мае 1882 г., посвящённой папирусу Ринда, с осеннего семестра он в качестве приват-доцента стал читать курс истории математики в Московском университете. С 1890 г. он уже читал два параллельных курса. В первом Бобынин излагал историю математики от древности до раннего Возрождения, заканчивая трудами Леонардо Пизанского и обзором средневековой математической литературы. Во втором он сообщал историю математики XV–XVIII вв., начиная обзором математических работ Кардано и Тартальи и доходя до описания вклада Монжа, Карно и Понселе. Не имея каких-то математических успехов и будучи скучным оратором, он не воспринимался значимым учёным, чьё мнение имеет научный вес. Современники не замечали фантастической работоспособности Бобынина и его титанических усилий по изучению и популяризации отечественной истории мате-

---

[66] Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б. *«Российские математики о науке и философии».* – Ульяновск: издатель Качалин А.В., 2012, с. 8–94.

матики[67]. Поэтому его определение математики в позитивистском духе не пользовалось вниманием: *«Математика … есть наука о величинах, предмет которой состоит в измерении величин, или, согласно с поправкой, внесённой Огюстом Контом, в непрямом измерении величин. Такое определение если и может считаться удовлетворительным, то только для отдаленного прошлого, … По определению Вильгельма Вундта, вполне выражающему современное состояние Математики, её предмет состоит в задаче «подвергнуть исчерпывающему свой*

[67] В.В. Бобынин первым исследовал русскую рукописную научную литературу до XVII века, описал её и проанализировал имеющиеся источники. Результаты он изложил в «Очерках по истории развития физико-математических знаний в России» (1886–1893). Его можно считать первым историком социальной истории математики в России – он начал реконструировать историю издания первых российских книг по физико-математическим наукам и учреждению военно-технических школ. Свои исследования он изложил в серии статей: «Состояние физико-математических знаний в России до XVI века» (Журнал Министерства народного просвещения. 1884, ч. 232), «Первые попытки учреждения высших школ и печатание книг физико-математического содержания» (Физико-математические науки. 1888, Т. VII), «Учебная и литературная деятельность, сосредоточившаяся около Школы математических и навигацких наук» (Физико-математические науки. 1888, Т. VII; 1890, Т. IX), «Первый русский математический журнал» (Физико-математические науки. 2-ая серия. 1899, т. I). В 1884 г. Бобынин подошёл к главному труду своей жизни – изданию журнала «Физико-математические науки в их прошлом и настоящем» (1885–1894). В связи с невозможностью окупаемости журнала (для чего требовалось не менее 600 подписчиков, а в лучшие периоды их едва превышало 150), ему приходилось выступать одновременно автором большинства статей, редактором, переводчиком, корректором и издателем. Средств на издание не хватало, сторонней помощи получить не удавалось, поддержки со стороны министерства образования не было. Бобынин издавал журнал на деньги, заработанные преподаванием в средних военно-учебных заведениях Москвы.

предмет исследованию мыслимые формы чистого усматривания, так же как и выполнимые, на основании чистого усматривания, формальные построения понятий, в отношении всех их свойств и взаимных отношений»»[68].

А.В. Васильев между формализмом и эмпириокритицизмом. Математик и популяризатор науки *Александр Васильевич Васильев* (1853–1929) подробно описал историю подходов к определению математики в духе формализма[69]. В 1884 г. Васильев защитил докторскую диссертацию *«Теория отделения корней систем алгебраических уравнений»*. Он стал профессором Казанского университета в 1887 г., заслуженным профессором – в 1899 г. Ему нравилось преподавание, и он читал лекции с большим энтузиазмом. Любимым курсом его было *«Введение в анализ»*, куда входили арифметика, теория пределов и теория комплексных чисел. Он также вёл курс теории вероятностей, построенный на философских основаниях позитивизма в сочетании с идеями детерминизма. Васильев был одним из основоположников фундаментальных исследований по истории математики в России, занимался он и философией науки.

Васильев лично знал К. Вейерштрасса, Г. Вейля, Д. Гильберта, Г. Дарбу, Г. Кантора, Ф. Клейна, Б. Леви, С. Ли, А. Пуанкаре, Б. Рассела, А. Уайтхеда, Ш. Эрмита, и с некоторыми из них состоял в регулярной переписке. Он участвовал в Международных конгрессах матема-

---

[68] Бобынин В.В. *«Математика»*/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XVIIIa (36).– СПб, 1896.

[69] Васильев А.В. *«Математика»*// Известия Физико-математического общества при Казанском университете, 1916, т. 22, №1, с. 1–58.

тиков, был вице-президентом IV Международного съезда математиков, председательствовал на Первом съезде преподавателей математики в Петербурге в 1912 г., где выступил с докладом *«Математическое и философское образование в средней школе»*. Он также участвовал в работе пяти Международных конгрессов по философии. Васильев организовал и возглавил инициативную группу Казанского физико-математического общества, готовившую юбилейные торжества к столетию Лобачевского. По его предложению была учреждена премия Лобачевского, был организован Международный конкурс (лауреатами премии были С. Ли, Д. Гильберт, Ф. Шур, Г. Вейль и ряд других известных математиков). Васильев был соредактором серии книг «Новые идеи в математике» (выпуски 1–10, СПб, 1913–1915). Цель этого издания была в ознакомлении с новыми математическими идеями и выявлении их связей с классическими доктринами математики. Авторами сборника стали известные математики и философы науки: Э. Мах, А. Пуанкаре, П. Ланжевен, Г. Минковский, М. Лауэ, Ф. Клейн, Г. Кантор, Б. Рассел, Г. Грассман, В. Вундт и многие другие. Позиция в сборнике самого Васильева выражала квинтэссенцию размышлений этих математиков и пользовалась вниманием в отечественном сообществе.

Математика определялась Васильевым как система логических следствий, выводимых с помощью символов из предпосылок (аксиом, постулатов, гипотез), которые могут быть устанавливаемы свободным разумом. К чистой математике он относил арифметику и геометрию, к прикладной математике – механику, акустику, астрономию. Васильев размышлял о соотношении чистой и прикладной математики. Он считал, что в логическом порядке абстрактная математика всегда следует за конкретной. По его мнению, чистую математику нужно излагать в единой и непрерывной, независимой от геометрических и механических соображений, системе. Изменения в математике породили необходимость дать новое определение чистой математики. Васильев отмечал, что предложено несколько возможных подходов к новому определению. Преимущественно это определения по содержанию: Рассел и Ительсон выдвинули идею порядка, Вундт и Христал – идею многообразия, и для них математика есть учение о порядке и многообразии. Но, в математике значим метод и символизм, что целесообразно учитывать в определении. Васильев полагал, что нужна наука об абстрактных отношениях. В свое время Лейбниц искал возможности свести всякое рассуждение к вычислению, и развитие науки во многом оправдало эти надежды. Особый вклад внесли: логическое исчисление Буля и символическое исчисление операций. Принцип перенесения Пуанкаре имеет столь же большое значение. Не только геометрические элементы могут быть заменяемы другими геометрическими элементами, но, как показала классическая работа Гильберта, тождество формальных отношений между геометрическими элементами, с одной стороны, и числами – с другой, даёт возможность решать на основании учения о числах важный для геометрии вопрос о независимости и совместимости её постулатов. Идея, объединяющая разнообразные математические дисциплины, и истинная сущность математики – есть идея вывода следствий из формальных отношений, существующих между элементами многообразия и устанавливаемых постулатами и гипотезами. Природа элементов не имеет при этом значения. Возможность создания одной дедуктивной математической системы, приложимой ко многим многообразиям, различающимся по существу, но тождественным по структуре отношений или форме, есть, по А.В. Васильеву, иллюстрация принципа экономии в математике.

Современными математиками, констатировал Васильев, осознана тесная связь новых взглядов на математику с логикой, причём некоторые учёные доходят до полного отождествления математики с ней. Чистая математика для Ч. Пирса есть совокупность формальных выводов, независимых от какого бы то ни было содержания. В этом же смысле высказывались Уайтхед и Рассел, считавшие, что идеал математики – построение вычисления во всех тех областях мысли или внешнего опыта, в которых последовательность событий может быть определённо удостоверена или точно установлена. Как заметил Васильев, будущее человеческой мысли покажет, насколько возможно приближение к этому идеалу.

Конвенционализм В.А. Стеклова. Один из наиболее выдающихся российских математиков и организаторов советской науки *Владимир Андреевич Стеклов* (1864–1926) был автором весьма интересной в контексте наших изысканий книги *«Математика и её значение для человечества»* (Берлин, 1923). Его научные интересы лежали в области приложения математики к естествознанию: большая часть его работ относится к краевым задачам математической физики и разложению функций в ряды по ортогональным системам функций. В 1902 г. Стеклова избрали членом–корреспондентом Петербургской Академии наук. Он участвовал в съездах естествоиспытателей и врачей в Москве и Киеве, а также в деятельности международных математических конгрессов, во время которых познакомился с выдающимися европейскими математиками. В 1912 г. Стеклов был избран академиком, а в 1919 г. стал вице-президентом Академии наук СССР и председателем её хозяйственного комитета. В трудный период перехода власти, когда был силён протест образованных классов, Стеклов, во многом не одобрявший происходившего переворота общественной жизни, тем не менее, занял взвешенно конструктивную позицию. Он отговаривал академиков и совет университета от бессмысленной фронды – митингов и забастовок против советского правительства и некоторых организационных решений. Он поддержал президента Академии Александра Петровича Карпинского и её секретаря Сергея Фёдоровича Ольденбурга. Вместе с ними Стеклов выстроил полезный для Академии диалог с правительством, позволивший сохранить её в качестве научного института. Он принял на себя хлопоты по организации финансирования и сохранения деятельности Академии, был одним из организаторов Комитета науки и членом комиссии по изучению производительных сил при Совете Народных Комиссаров СССР. При активном участии Стеклова Комитет науки подготовил решения правительства, укрепляющие

Академию наук. Академия получила новые здания, была достроена её библиотека. Стеклов наладил печатание научных трудов, договорился о приобретении заграничных научных книг и журналов. В 1919 г. он организовал и возглавил Физико-математический институт Академии наук, ставший исследовательским центром по физике и математике.

Философские убеждения Стеклова можно определить как последовательный эмпиризм, сочетающийся с умеренным конвенционализмом. В вопросе происхождения научного знания и его достоверности Стеклов был сторонником эмпиризма. Исследовав развитие эмпиризма и рационализма на примере математического знания, он заключил, что совокупность всех выводов на основе опыта и наблюдения, относящихся к определённой группе явлений, объединённых какими-либо общими признаками, составляет науку о явлениях рассматриваемой категории. Так, геометрия – наука о свойствах фигур и вообще тел, когда учитываются лишь свойства протяженности, а механика – наука о движении материальных тел в зависимости от сил, производящих движение. Физика, кроме геометрических свойств тел и их движения, учитывает другие явления: тепловые, звуковые, электрические, магнитные, световые. При переходе от одной науки к другой растёт сложность исследуемых явлений. Самой простой науке, геометрии, предшествует арифметика, имеющая дело только с понятием количества. В ней менее всего видно опытное происхождение понятий. *«Вековая привычка»* сделала их самоочевидными для ума, но к открытию чисел привели наблюдение и опыт над реальными вещами. В разуме нет априорных идей, все основные аксиомы извлекаются умом из наблюдения. Интуитивное извлечение понятий из накопленного в уме опыта есть прирожденная физиологическая способность мозга.

Стеклов предлагал отказаться от понятия *«абсолютной достоверности»* как пережитка схоластической метафизики, поскольку абсолютные достоверность и точность науке не свойственны. Этот термин в *«его старо-философском значении, представляется пустым звуком»* без определённого содержания, подобно терминам: абсолютное пространство, абсолютный покой и т.п. Аксиомы геометрии, законы механики, положения арифметики имеют характер приближённых истин, и нет никаких средств – ни опыта, ни чистого умозаключения, – чтобы установить их абсолютность. Достоверность основных законов «точных наук» такая же, как и у всякого закона опытных наук, проверенного многократным наблюдением. В следствиях, составляющих содержание этих наук, их можно считать точными, поскольку они построены на основании логических умозаключений. Степень приближения к действительности, принимаемая ранее, может быть отклонена по мере роста возможностей наблюдения. И это приведёт к появлению новых законов или к усовершенствованию прежних. В строгом же смысле, по Стеклову, есть только одна точная наука – это чистая математика и основанная на ней геометрия.

На философские взгляды Стеклова в определённой степени повлиял конвенционализм Пуанкаре, глубоко мыслящего математика, высказавшего своё понимание специфики научного знания вообще и математического, в частности. Рассмотрев опыт применения аксиоматического метода в ряде математических дисциплин, Пуанкаре заключил, что аксиомы являются продуктами соглашения, не имеющими опытного происхождения. Выбор аксиоматической системы обусловлен соображениями удобства и продуктивности математического доказательства. Но эти соглашения не произвольны – если учёный добился успеха в научном описании явления, это свидетельствует о верности избранного им пути. Научные конвенции должны быть непротиворечивыми, и в некоторых фундаментальных математических теориях они ориентированы на самоочевидность. Именно это положение уточняет Стеклов, не соглашаясь с тем, что аксиомы – это простые соглашения. Для него аксиомы – также и опытные идеи разума. Основы и законы всех наук о природе извлекаются умом из опыта и наблюдений, а способность извлекать закономерности из накопленного опыта с помощью интуиции – физиологическое свойство мозга, и наличие этой способности устанавливается непосредственным наблюдением. При установлении основных начал какой-либо науки, подтверждающихся опытом и наблюдением, появляется возможность из небольшого числа основных законов выводить в качестве необходимых следствий не только все *«наблюдённые явления природы»*, но и предсказывать теоретические факты и явления. Всякая научная теория, полагал Стеклов, будет признаваема, пока её объяснения известных фактов удовлетворяют научное сообщество и она предсказывает новые явления с надлежащей степенью точности. Но это состояние не вечно. Новые наблюдения обнаружат противоречащие принятой модели факты. И это приведёт к открытию нового класса явлений, управляемых особыми законами.

Проблема статуса математики и её оснований была актуальна в начале XX в. Петербургская математическая школа тяготела к логицизму и формализму, а московской математической школе были близки идеи интуитивизма. Но при том, что отечественные математики безоговорочно принимали идеи европейских лидеров науки, они их творчески перерабатывали, создавая собственные оригинальные концепции.

С.А. Богомолов между формализмом и интуитивизмом. Философию математики последовательно развивал геометр *Степан Александрович Богомолов* (1876–1965)[70]. В 1900 г. он окончил Петербургский университет по математическому отделению физико-математического факультета. В 1901 и 1902 гг. преподавал в гимназии и Реформаторском училище, что определило его позднейший интерес к проблемам методики преподавания математики. В 1902–1918 гг. он был штатным сотрудником Петербургского политехнического института, в 1918–1924 гг. работал в Высшем педагогическом институте. В 1921–1938 гг. Богомолов возглавлял кафедру математики Артиллерийской академии, а в 1938–1954 гг. – кафедру математики Военно-транспортной академии.

Сфера научных интересов Богомолова – геометрия, геометрическая кристаллография и философия

[70] Беспамятных Н.Д. *«Степан Александрович Богомолов»*. – Л.: Наука, 1989, 117 с.

математики. Философией математики он заинтересовался ещё в студенческий период, когда участвовал в работе философского и математического обществ, темами заседаний которых была проблема оснований математики и, в частности, – геометрии. В 1924 г. Богомолов организовал Общество ревнителей математического образования (ОРМО), которое возглавлял до 1930 г. Общество объединяло усилия методистов в период реформирования системы образования, пропагандировало новые математические и методические идеи среди учителей и существенно влияло на ленинградское математическое образование.

В 1907–1928 гг. Богомолов написал серию статей и книг по философским проблемам математики, прежде всего – геометрии. В 1913 г. вышла его книга *«Вопросы обоснования геометрии: интуиция, математическая логика, идея порядка в геометрии»*, где он развил тему интуиции в геометрии, на фоне набиравшей силу гильбертовой программы обоснования геометрии как чисто логической системы. Его философские кумиры, чьи идеи он брал для своего определения интуиции – Лейбниц, Кант, Шопенгауэр, А.И. Введенский и И.И. Лапшин. Богомолов считал интуицию *«особым источником достоверного знания в геометрии, не сводящимся к простому констатированию свойств эмпирически воспроизводимых фигур и естественно противополагаемом логической дедукции из аксиом»*[71]. Он полагал, что интуитивная очевидность проистекает из начальных геометриче-

[71] Богомолов С.А. *«Вопросы обоснования геометрии. Часть 1»*. – СПб: Издание Товарищества В.В. Думнов – Наследники Братьев Салаевых, 1913, с. 49.

ских сведений, полученных в *«глубинах подсознательной деятельности»* и неразрывно связанных со свойствами движения твёрдых тел. Интуитивные знания имеют эмпирическое происхождение, но это не умаляет их. Интуиция пространства позволяет выявить основные положения геометрии и даёт повод к формулированию аксиом, причём сам процесс этот имеет логико-рациональный характер и происходит за пределами интуиции. Богомолов заметил, что размышления об источниках геометрического знания изменили представления о самой геометрии. В современном понимании, она – отрасль чистой математики, хотя ранее считалась наукой о реальном пространстве. «*После открытия неевклидовых систем и других «патологических» геометрий такое воззрение должно было пасть; всё яснее и яснее выступало убеждение, что дело математики – в том числе и геометрии - установить связь известных результатов с известными предпосылками; что же касается истинности самих предпосылок – в частности сюда входит вопрос об истинных свойствах нашего пространства, – то эти исследования выходят за пределы нашей дисциплины…*»[72]. Геометрия в своём развитии стала гипотетико-дедуктивной системой, любая её теорема состоит из утверждения связи двух предложений, в следовании одного из другого. Выбор аксиом осуществляется свободно, но он целесообразен с точки зрения практических приложений. Задача геометрии – доказать её положения на основе принятых аксиом. При доказательстве теорем Богомолов отводит интуиции место, напоминающее её роль при обосновании всей геометрии. При доказывании от-

[72] Там же, с. 76.

дельной теоремы недостаточно последовательных дедуктивных рассуждений. Внутренняя логика, общий план и способ комбинирования имеющихся средств – это область интуиции. Строгость в геометрии достигается тем, что каждое понятие, не вошедшее в число основных, с их помощью определяется, а всякое предложение, не вошедшее в число аксиом, должно быть строго доказано с их помощью. Источник новых положений в геометрии – интуиция. Абстрактная геометрия может иметь разные истолкования, так как основные понятия характеризуются только системой аксиом. Под основные понятия можно подводить любые объекты, если остаются в силе утверждения аксиом. Это допускает перенос выводов из одной системы в другую. Система аксиом должна удовлетворять условиям непротиворечивости, независимости и полноты.

В 1923 г. Богомолов публикует новую книгу[73] о философии математики. В ней продолжен анализ причин интереса математиков к обоснованию геометрии, изучено соотношение логики и интуиции в процессе геометрического познания. Богомолов проясняет понятие аксиомы, излагает суть аксиоматического метода, исследует связь геометрических систем с реальным пространством.

Рост интереса к основаниям математики, по Богомолову, обусловлен логикой развития математического знания – открытием неевклидовой геометрии и развитием проективной геометрии. В математическом познании соединены обеспечивающая поиск интуиция и определяющая полноту доказательства логика. Он

---

[73] Богомолов С.А. *«Основания геометрии»*. – Пг., 1923, 330 с.

полагал, что вопрос об истинности аксиом решается не геометрией, а философией. Системы Евклида, Лобачевского и Римана – истинны, так как логически правильно построены на базе принятых аксиом. Прикладная геометрия изучает свойства реального пространства, подключая результаты опыта и наблюдений. Это создаёт определённые сложности. Ведь результаты измерений связаны с теорией инструментов, не свободной от конкретной геометрии. Здесь видна идея теоретической нагруженности фактов и наблюдений, которая позднее станет известной благодаря К. Попперу. Изучая природу, нельзя ограничиться выбором геометрической системы, также значим выбор астрономической и физической гипотез. Можно брать любую систему геометрии, но «*все исследования истинных свойств реального пространства ставят вне всяких сомнений полную практическую пригодность евклидовой геометрии*»[74].

Концепция математического знания Богомолова тяготела к интуитивизму. Но теоретическую математику он определял в духе логицизма и формализма: «*чистая математика есть система логических следствий, выводимых с помощью символов из свободно устанавливаемых предпосылок*»[75]. Богомолова нельзя отнести к последовательным интерналистам или экстерналистам – он размышлял вне этих систем. С одной стороны, он заявлял, что математика «*сама создаёт предмет своего исследования*». Но с другой – при описании истории геометрии указывал, что проективная геометрия развилась из

[74] Богомолов С.А. «*Основания геометрии*». – Пг., 1923, с. 316.
[75] Богомолов С.А. «*Эстетические элементы в математике*»// Вопросы преподавания математики/ Под ред. И.А. Сигова и И.С. Симонова. – Л.: Изд-во Брокгауз-Ефрон, 1925, с. 7.

практических потребностей живописи и архитектуры. Зная направления развития философии математики, Богомолов видел достоинства и слабости всех программ и пытался учесть их. Его позиция сочетала умеренные формы интуитивизма и логицизма.

Богомолов интересовался механизмом развития научной теории. Он анализировал возможности постановки научных проблем и средства для их решения в математическом сообществе. Он обосновал логическую предопределённость последовательности выдвижения и разрешения проблем неевклидовой геометрии. Так, геометрия Римана концептуально и логически следует за геометрией Лобачевского. Геометрия Лобачевского изменила только одну аксиому в евклидовой системе. Геометрия Римана связана с более глубокими изменениями. Геометрии Евклида и Лобачевского исчерпывают две возможности для параллельных линий, а геометрия Римана осуществляет и третью возможность, отрицающую существование параллельных. Например, любая пара прямых линий в геометрии Римана на сфере пересекается, как и в проективной геометрии. Определение Риманом прямой как замкнутой геодезической вызывает изменение ряда аксиом Евклида. Поэтому третья возможность не рассматривалась в перспективе построения цельной геометрии, при том, что сферическая геометрия была хорошо изучена.

Богомолов выделил главные проблемы аксиоматизации геометрии Римана и предложил собственный способ их преодоления. Он определил риманову геометрию в духе Клейна: «*Геометрией Римана называется та неевклидова геометрия, в которой нет параллельных прямых, и* *прямая есть линия замкнутая. Сферической системой мы называем ту форму её, которая характеризуется двумя точками пересечения прямых одной плоскости. Эллиптической системой называется другая форма, которая характеризуется одной точкой пересечения у двух прямых»*[76]. Сама геометрия Евклида – параболическая, так как имеет одну бесконечно-удалённую точку, а геометрия Лобачевского – гиперболическая, так как имеет две бесконечно-удалённые точки. Эллиптическая проективная геометрия может быть получена из сферической, если отождествить диаметрально противоположные точки сферы. Богомолов сопоставил системы геометрических аксиом, взяв за основу систему аксиом Гильберта евклидовой геометрии. Для изучения связей систем аксиом эллиптической и сферической геометрий с аксиомами евклидовой геометрии, он определил основные понятия этих систем.

И хотя в работе Богомолова не было значительных геометрических результатов, ясность изложения, полнота описания и тонкий анализ позиций математиков по вышеназванным проблемам, а также философские соображения об отношении этих геометрических систем к свойствам реального пространства сделали его сочинение оригинальным явлением. Но в связи с идеологическими преследованиями по причине, прежде всего, его лидирующего положения в Обществе ревнителей математического образования, Богомолов с 1930-х гг. фактически ничего не публиковал по теме философии математики, полностью переключившись на проблемы геометрии. После критики его позиции в

---

[76] Богомолов С.А. *«Основания геометрии»*. – Пг., 1923, с. 271.

области философии математики на его работы из осторожности не ссылались, что привело к их фактическому забвению.

Н.Н. Лузин о математике. Лидер Московской математической школы *Николай Николаевич Лузин* (1883–1950) влиял на своих учеников выбором начальной тематики математических исследований, направляя также их мировоззрение и философские взгляды. Его собственный интерес к проблемам оснований математики сформировался во время обучения в Московском университете: обширными отступлениями на тему философии науки славились лекции физика Н.А. Умова, оригинальную философскую систему развивал и пропагандировал математик Н.В. Бугаев. В течение года Лузин посещал лекции по философии на историко-филологическом факультете. В 1906 г. во время перерыва занятий в связи с российскими революционными событиями, Лузин слушал в Сорбонне вдохновляющие лекции выдающегося математика Пуанкаре. В период 1911–1914 гг. он был в заграничной командировке для усовершенствования в математике. В Гёттингене и Сорбонне Лузин общался со многими знаменитыми математиками, – Пикаром, Адамаром, Борелем, Лебегом и Ландау, обсуждая с ними профессиональные темы и особенности математического творчества вообще. Весной 1914 г. в Париже он участвовал в математическо-педагогическом и математическо-философском конгрессах. Лузин отделял свои философские воззрения от собственно научной деятельности: *«Метафизика отделена от науки непроницаемой стеной. Между ними нет никаких связей. В метафизике может быть застой, а* *может быть расцвет и бурная, кипучая активность. Ни в том, ни в другом случае это не окажет ни малейшего влияния на процессы, происходящие в науке»*[77].

На темы философии математики Лузин отдельных работ не публиковал, но излагал свои мысли об этом в неформальной обстановке и на лекциях. Его философские идеи можно частично реконструировать из переписки с В.И. Вернадским. Масштабный проект Гильберта Лузин описывал скептически. Привлекательно достичь единства в понимании «математической строгости», но на практике вышло редуцирование проблемы. Для доказательства непротиворечивости геометрии Евклида алгебраизируют её систему аксиом. *«Этот приём переводит противоречие в геометрии (если оно там есть) на противоречие в алгебре»*. Возникает следующая проблема доказательства непротиворечивости алгебры. Гильберт описал систему аксиом алгебры и доказал, что она может быть арифметизирована, т.е., – отображена в арифметике. Так непротиворечивость алгебры редуцируется к непротиворечивости арифметики. Появилась новая проблема – доказать непротиворечивость арифметики. Поначалу предполагалось свести её к вопросу о непротиворечивости логики. Казалось, что тогда проблема обоснования математики будет доведена до естественного конца – нельзя же доказывать непротиворечивость логики при помощи той же самой логики. *«Но Гильберт теперь хочет поступить иначе, а именно: он сейчас ищет свести вопрос о непротиворечивости логики на арифме-*

---

[77] Бескин Н.М. *«Воспоминания о Московском физмате начала 20-х годов»*/ Историко-математические исследования, вып. 34. – М.: Наука, 1993, с. 173.

тику и арифметические проблемы и, затем, ищет доказать непротиворечивость арифметики (и логики) при помощи решения тех или иных чисто арифметических вопросов. Сейчас дело остановилось на этой стадии, и вопрос осложнился тем, что у Гильберта нашли противоречия и логические промахи. Вопрос сейчас безнадёжно запутался и, подобно Вавилонской Башне, сами её строители начинают утрачивать общий язык, общеобязательное понимание друг друга, понимание их идей – и всё разваливается в облаках математической пыли»[78]. Далее Лузин делает ремарку, которую можно истолковывать в пользу его симпатий к эмпиризму – «*нужно идти скорее путём Гумбольдта и Кювье, чем Гильберта*»[79].

Лузин критиковал формализм Гильберта как «новую вавилонскую башню»: «*В последнее время Гильберт захотел обосновать на символах всю математику. Целью его было освобождение от парадоксов и circulus vitiosus*[80]*. Для этого он все процессы математической мысли облёк в символы и начал учить о том, что вся математика есть лишь соединение в цепи его символов и что этим избегаются circulus vitiosus'ы. Но вскоре же начались парадоксы в самой системе Гильберта и появились circulus vitiosus'ы. Первый, кто усомнился в действенности системы Гильберта, был Лебег. Он мне в Париже в 1930 г. с возмущением говорил о попытке Гильберта и предсказал крушение этой «новой вавилонской башни», ибо «символы Гильберта сами по себе не имеют противоречий и мы можем их с полной безопасностью комбинировать в сколь угодно длинные цепи, но под условием, чтобы символы эти не имели бы конкретного смысла.*

[78] *«Н.Н. Лузин – В.И. Вернадскому. 28 июня 1937»*/ Вернадский В.И. *«Переписка с математиками»*. – М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996, с. 53–54.

[79] Там же, с. 54.

[80] *circulus vitiosus* (лат.) – порочный круг рассуждения.

Едва же настанет момент, когда его символы хотят приложить к конкретности, как смысл, входящий в символы Гильберта, заставляет оживать эти окаменелости и точка пересечения различных цепей символов Гильберта прекрасно может явить противоречие, и circulus vitiosus». Это предсказание оправдалось через несколько лет»[81]. Лузина беспокоило расширение канторовой практики определения математических объектов как совокупностей. В идее множества он видел ограниченность, полную охваченность, закрытость и законченность. Он угадывал в этом признаки старения и угасания творческой мысли.

Лузин тяготел к эффективизму или «полуинтуиционизму»[82]. Среди исследователей творчества Лузина нет единства в понимании того был ли он платонистом или конструктивистом. Учитывая его эффективистские предпочтения, логично допустить, что он склонялся к конструктивизму. *«Эффективизм был вызван к жизни недовольством крайней абстрактностью канторовской теории множеств (философские воззрения Г. Кантора уверенно могут быть охарактеризованы в терминах платонизма или же, несколько иными словами, аристотелевского реализма). Центральные абстракции канторовской теории множеств – актуальная бесконечность, трансфинитная индукция и т.п. – в эффективизме переосмысливались под углом зрения принципов эмпиризма. Это означало, что допустимые в эффективизме абст-*

---

[81] *«Н.Н. Лузин – В.И. Вернадскому. 20 сентября 1938»*/ Вернадский В.И. *«Переписка с математиками»*. – М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996, с. 61–62.

[82] Идеи Н.Н. Лузина во второй половине 1920-х гг. воодушевили А.Н. Колмогорова и В.И. Гливенко на построение первых аксиоматических систем интуиционистской логики и доказательство теорем о взаимоотношении между классической логикой и интуиционистской.

ракции проходили проверку на их определимость (выразимость) и индивидуацию»[83]. Доступными опыту множествами эффективисты считали только множества конечные и счётные, а все прочие представляли идеальными объектами, полезными для исследования математических реалий, но лишенными опытного содержания. Их главной философской заслугой считают конструктивное осмысление континуума без ясной идеи самих конструктивных методов. Эффективизм способствовал признанию важности этих методов в математике. Дескриптивная теория множеств решает вопросы эффективного определения математических объектов и разрешимости математических проблем.

Об условиях развития математических идей Н.Н. Лузин высказался в переписке с О.Ю. Шмидтом. Весьма важной для научной работы он предполагал активную коммуникацию, предоставляющую столкновение и развитие идей. Математику он считал *«внутренней наукой»*. Создаваемая работой, прежде всего, научных семинаров коммуникация позволяет выходить за рамки узких интересов. Неизбежной для математических школ является конкуренция между поколениями, которая обеспечивает их процветание: *«Всегда одно и то же самое: недовольство прежним элементом престарелого (годами или идеями) предыдущего поколения, тайная мобилизация сил, так сказать «математического подполья», состоящего из зелёных молодых сил, воспитанных на пренебрежении классиками и на культуре «математики – модерн» ... момент столкновения*

[83] Бажанов В.А. *«Имело ли место влияние имяславия на развитие математики»*// Эпистемология и философия науки, 2010, т. XXVI, № 4, с. 143.

поколений, взрыв, краткая борьба и далее – смотря по условиям – поражение, признание или победа»[84].

* * *

Свободные размышления о философских проблемах математики были отчасти пресечены в 1930–40-е гг. под партийным идеологическим давлением. В СССР победила диалектико-материалистическая концепция математического знания, достаточно искренне и последовательно разделявшаяся математиками до конца 1960-х гг. В 1970-е гг. партийный контроль за философскими и мировоззренческими взглядами учёных ослаб. Стали регулярно и содержательно работать методологические семинары по проблемам философии науки. В крупных научных центрах на таких семинарах лидировали учёные, осознающие свою практическую полезность для общества, а не профессиональные философы, не забывающие о своей идеологической природе. Тогда и математики начали создавать оригинальные варианты философии своей дисциплины.

[84] *«Письмо Н.Н. Лузина к О.Ю. Шмидту»*/ Историко-математические исследования, вып. 28. – М.: Наука, 1985, с. 281.

КАМПАНИЯ ПО ДИАЛЕКТИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ

В конце 1920-х гг. и начале 1930-х, на волне кампаний, распространявших идеологическое регулирование на образование и науку, испытанию на стойкость, социальную зрелость и этическую ответственность подверглись многие дисциплинарные сообщества. У гуманитариев не было шансов избежать тотального контроля. Остатки самостоятельности, не утраченные в 1920-е гг., были у них отобраны в конце 1930-х гг.: *«дело историков»* и *«дело библиотекарей АН»* стали финальными аккордами в той трагической какофонии. Иногда естественнонаучные сообщества справлялись с разрушительным произволом научных комиссаров и активностью молодых карьеристов. Но только если научная элита выступала консолидировано и не использовала в научной дискуссии идеологическую риторику и административный ресурс. Здесь причина различия последствий идеологизации для биологов[85] и физиков, отстоявших самостоятельность научных дискуссий[86].

---

[85] Гонения на генетику были отчасти спровоцированы жалобами лидеров этой молодой науки партийным властям в борьбе со старыми учёными. Погубившие их лысенковцы потом лишь прошли по проторенной дороге вовлечения административно-партийного руководства в научные споры.

[86] Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б., Горшкова А.В. *«Физика – «партийная наука»? (об идеологических конфликтах в науке)»*// Власть, 2013, №6, с. 119–122; Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б. *«Идеологические конфликты в естественнонаучном сообществе в СССР в 30-е годы»*//Философия власти и власть философии: к 90-летию «философского парохода». Материалы Всероссийской конференции. − Ульяновск, 2013, с. 68–73.

Идеологическая кампания в математике 1930–40-х гг. Партийную чистку в советской математике организовал международный авантюрист Кольман[87], занимавший должность помощника заведующе-

[87] Кольман Эрнест Яромирович (1892–1979) – советский партработник. Родился в Праге в семье почтового чиновника. Короткое время учился на ф-те машиностроения и электротехники Высшей политехнической школы и посещал лекции на математическом отделении философского ф-та Карлова университета. Подрабатывал репетиторством математики. Увлекался танцами, сионизмом, марксизмом и путешествиями. Работал вычислителем при астрономической обсерватории. В 1914 был призван в австрийскую армию. В России был ранен и пленён, работал переводчиком при лазарете. После Октября вошёл в Комитет военнопленных революционных социал-демократов-интернационалистов и вёл пропаганду среди военнопленных. В 1918 получил советский паспорт, вступил в РКП(б), познакомился с Троцким, Бухариным, Землячкой и Лениным. В Москве служил в военкомате и райкоме партии, был членом «тройки» ЧК. С 1919 работал в Коминтерне в Германии. С 1923 работал в Агитпропе Коминтерна в Москве, был заведующим Губполитпросвета, издательства «Московский рабочий», членом Моссовета. С 1929 – заведующий Агитпропа ЦК ВКП(б). В 1930–32 возглавлял Московское математическое общество. В 1932 участвовал в Международном конгрессе математиков в Цюрихе, вошёл в дирекцию Института Марксизма-Ленинизма, заведовал кабинетом Маркса, стал директором Института Красной профессуры Естествознания, читал лекции по философским проблемам математики. В 1936 стал завотделом науки МГК ВКП(б), издал книгу *«Предмет и метод современной математики»*. В 1937 был репрессирован и лишён всех постов, но уже в 1939 стал завотделом диамата Института философии АН СССР. Во время войны был на партработе в Москве. В 1944 передан в Чехословакию в аппарат ЦК КПЧ, стал профессором Карлова университета. В 1948 был арестован за интриги против руководства КПЧ, возвращён в СССР и содержался в московских тюрьмах. В 1952 был освобождён и выслан в Ульяновск к семье. Вскоре вернулся в Москву, работал в Институте истории естествознания и техники АН СССР. В 1959 опять послан в Прагу, стал чехословацким академи-

го Отделом агитации и пропаганды ЦК ВКП(б). Его поддерживали молодые «левые» математики – А.Р. Кулишер, Л.А. Лейферт, В.В. Люш, В.И. Микулинский, Е.С. Рабинович, А.В. Дыман, Д.К. Кноль, И.Ф. Лохин, Б.И. Сегал, и некоторые другие. Они выступили за «диалектизацию математики» и превращение её в партийную науку. Это требовало решения вполне определённой задачи – дать подходящее определение математики, выяснить её статус и методологическую специфику. «Левые» математики в первую очередь критиковали «старую профессуру» – С.Н. Бернштейна, А.В. Васильева, Н.М. Гюнтера, С.А. Богомолова. И затем – занимавших административные должности «новых» математиков, поднявшихся после революции и активно участвовавших в образовательных реформах и создании научных институтов.

Результатом и символом этой кампании стало печально знаменитое *«дело»* Лузина[88]. Истинной причиной его была борьба между молодым и старым поколением математиков за социальные привилегии и командные посты в математическом сообществе. За помощью к власти обратились адепты новой науки –

ком. В 1962 вернулся в Москву, участвовал в методологическом семинаре ГАИШ, написал не принятую в печать книгу *«Проблема бесконечности»*. В 1968 сочувствовал антигосударственным выступлениям в Чехословакии. В 1970 был в чехословацкой делегации X Международного философского конгресса в Амстердаме, начал писать мемуары *«Мы не должны были так жить»*, переправленные на Запад в 1975. Во время поездки в Швецию в 1976 попросил политического убежища, вышел из КПЧ и КПСС. Умер в Стокгольме.

[88] *«Дело академика Николая Николаевича Лузина»*/ Под ред. С.С. Демидова, Б.В. Левшина. – СПб: РХГИ, 1999, 312 с.

«пролетарской» топологии. Руками своего научного эксперта Кольмана партия постаралась освободиться от нелояльных власти старых профессоров, сохранивших научный авторитет, не компенсировавший их мировоззренческую чужеродность. К этому времени подросло новое поколение идеологически преданных, молодых и талантливых математиков.

Открытая политизация дискуссий началась около 1928 г. С почина некоторых преподавателей университета в ленинградском математическом обществе возникла группа «левых» для борьбы с «правыми»[89]. В Академию наук одновременно были выдвинуты Н.М. Гюнтер и И.М. Виноградов, что ожесточило споры математиков. От Московского математического общества были рекомендованы Н.Н. Лузин и Д.Ф. Егоров. Для снятия напряжения конфликта В.И. Вернадский предлагал провести Лузина по философскому отделению. В итоге в 1929 г. Виноградов и члены-корреспонденты Бернштейн, Крылов и Лузин были избраны академиками АН СССР по физико-математическому отделению (математике), а члены-корреспонденты Д.А. Граве и Д.Ф. Егоров были избраны почётными академиками. Член-корреспондент АН с 1924 г. Гюнтер академиком избран не был.

27 декабря 1929 г. на конференции аграрников-марксистов Сталин произнёс речь, в которой отметил отставание научной теории от практики и призвал к *«повороту в политике партии»*. Это стало сигналом

---

[89] К правой группе относились – Н.М. Гюнтер, В.И. Смирнов, Г.М. Фихтенгольц, к левой – Л.А. Лейферт, А.Д. Дрозд, А.Р. Кулишер. Промежуточную фракцию образовали И.М. Виноградов и А.М. Журавский.

для «философского фронта» и для математического. Одной из вех *«поворота»* стало смещение в 1930 г. Д.Ф. Егорова с поста директора Института математики и механики Московского университета. Выдающийся учёный и администратор Егоров был воспитан в московской математической школе. Он был учеником Н.В. Бугаева, создавшего оригинальную религиозную и философскую концепцию аритмологии. Егоров не скрывал свои религиозные убеждения и неприязнь к новой власти. Его сменил «красный профессор» О.Ю. Шмидт, призвавший сотрудников Института перестроить работу на марксистской основе.

В июне 1930 г. на Первом всесоюзном съезде математиков в Харькове Егоров призвал не отправлять приветствие от имени Съезда математиков в адрес XVI Съезда партии, проходившего в то же время. В сентябре 1930 г. его арестовали по делу *«Истинно-православной церкви»*, и через год Егоров скончался в Казани в тюремной больнице. После его ареста Московское математическое общество оказалось под угрозой закрытия. Руководство общества осудило контрреволюционную деятельность Егорова и избрало президентом Кольмана.

Организатором Первого всесоюзного съезда математиков выступил Украинский институт математических наук, возглавляемый выдающимся учёным с дореволюционными научными заслугами Сергеем Натановичем Бернштейном (1880–1968). На съезде состоялась дискуссия о применении метода диалектического и исторического материализма к истории и обоснованию математики, а также о *«внедрении этого метода в* *собственно математическое исследование».* Главными оппонентами стали сторонник диалектики М.Х. Орлов и её противник С.Н. Бернштейн, полагавший, что между диалектикой и математикой нет точек соприкосновения. Бернштейна после съезда сняли с должности директора института и на этот пост поставили Орлова. Но, будучи профессором Харьковского физико-химико-математического института, Бернштейн в институтской многотиражке напечатал статью против распространения в математике диалектического метода, приводящего, по его мнению, к скудоумию. Метод материалистической диалектики можно было бы принять, если бы с его помощью не хуже, чем математическими методами решалась бы какая-нибудь математическая задача, но таковых нет. Математика, в отличие от философии, имеет работающие методы. А постоянные философские дискуссии показывают, что у философии нет единства и ясности, и поэтому внедрение философского диалектико-материалистического метода в математику не принесёт пользы науке. Кроме того, математика внеклассова и внеполитична, поэтому математики разных убеждений могут совместно работать над одними проблемами, дополняя друг друга.

В ответ Орлов разоблачил Бернштейна: «*Акад. Бернштейн ведёт активную борьбу против марксизма-ленинизма, прикрываясь лозунгами аполитичности и непартийности. Но, как всегда в таких случаях, эти лозунги припрятывают враждебную нам политическую линию. И действительно, обосновывая аполитичность, непартийность и надклассовость математики, акад. Бернштейн становится на вполне определённые идеологические позиции, характеризуемые как реакцион-*

ная философия воинствующего эклектицизма. Ещё на Всероссийском математическом съезде 1927 года акад. Бернштейн проявил свои методологические ярко антимарксистские взгляды. Но наиболее чётко он сформулировал их в статье, посланной в начале 1931 г. в многотиражку Харьковского физико-химико-математического института»[90]. Орлов декларировал общезначимость диалектики, которая поэтому уместна и в математике. Партийность математики показывают примеры «идеалистической» математики Гильберта и «субъективно-идеалистической» теории Брауэра.

Подчеркнём ещё раз, что настоящей целью этих прений был передел власти в математическом сообществе. Вытеснить авторитетных учёных на математическом ристалище было невозможно, поэтому полем для атаки на них стали области истории и философии математики, а также методика преподавания в школе и вузе. Именно здесь было легче найти предмет для критики идеологически неверной или «академически» аполитичной позиции. Против математиков-идеалистов, влиявших на научное и педагогическое сообщество методическими, научно-популярными и философскими работами, выступили воинствующие материалисты. В ход шли идеологические аргументы, возражать которым в период государственной борьбы с пережитками реакционного и классового вредного мировоззрения было опасно. «Старым профессорам» приписывались «уличающие» характеристики, подрывающие их позиции: *«группа кадетствующей профессуры, умело держав-*

[90] Орлов М. *«Боротьба за марксо-ленінску методологію в математиці»*// Журнал математического циклу ВУАН. – К., 1931, №1, с. 22–24.

шая контакт с царским министерством, и с Академией наук, и университетом, и с Математическим обществом с одной стороны и в то же время ведущая работу среди «левых» кругов преподавателей средней школы. Эта группа не чуждалась вопросов методики преподавания, интересовалась историей математики и философии и выступала с позиций воинствующего идеализма по этим вопросам на съездах и совещаниях. К этой группе следует отнести проф. А.В. Васильева, к ней же, пожалуй, следует причислить проф. С.А. Богомолова и ряд других профессоров»[91]. Показательны обвинения С.А. Богомолова в специальной резолюции по итогам диспута *«О трудах и деятельности проф. С.А. Богомолова»*, проходившего 20 мая 1931 года: *«После победы Октябрьской революции, продолжая занимать кафедру в Ленинградском педагогическом институте, проф. С.А. Богомолов не написал ни одной научной работы в защиту и обоснование школьных и методических реформ в области математики, проводимых советской властью. В изданной Гизом книге «Основания геометрии», написанной на базе 15-летнего опыта чтения лекций по курсу того же названия, автор даёт всё ту же неправильную оценку работам крупнейших геометров, искажая её в интересах той же идеалистической тенденции в науке, с которой автор неоднократно солидаризируется и в этой книге. Кроме того, через частные издательства проф. С.А. Богомолов издаёт две популярные книги: 1) «Актуальная бесконечность» и 2) «Эволюция геометрической мысли» в целях более широкой пропаганды идеалистических учений в анализе геометрии и для распространения идеалистических концепций по вопросам истории математики. Здесь он вновь даёт*

[91] *«На Ленинградском математическом фронте»* (под ред. Л.А. Лейферта, Б.И. Сегала и Л.И. Фёдорова). – М.-Л.: ГСЭИ, 1931, с. 9.

простор своему стремлению привести через математику, через отрыв теории от практики, читателя прямо в объятия мистицизма»[92]. В ход пошли демагогические лозунги и призывы следующего свойства: «*Мы должны прежде всего повернуть математику к практике социалистического строительства… Прежнее деление дисциплин и отчуждённость этих дисциплин должны отпасть. Новые задачи обнаружат несомненно тесную связь даже между наиболее отдалёнными отделами математики ... Вся наша работа должна быть пронизана ленинским принципом партийности в науке, единственным методом должен служить метод диалектического материализма. Только при этом условии нам удастся освободить советскую математику от идеологического плена буржуазной науки»*[93].

О.Ю. Шмидт о роли математики в строительстве социализма. Одной из целей для нападок диалектизаторов математики был руководитель Ассоциации естествознания Комакадемии О.Ю. Шмидт[94].

---

[92] Там же, с. 41.

[93] Сегал Б. *«Задачи Ленинградского математического общества»*// На Ленинградском математическом фронте. – М.-Л.: ГСЭИ, 1931, с. 27–29.

[94] Шмидт Отто Юльевич (1891–1956) – выдающийся учёный и организатор советской науки. Окончил физмат Киевского университета в 1916 и был оставлен работать приват-доцентом. Студентом, под руководством Д.А. Граве, написал первые математические работы в области абстрактной теории групп. За одну из них получил золотую медаль. В 1918 стал большевиком и активно участвовал в строительстве социалистического государства. Входил в руководство Народных Комиссариатов продовольствия, финансов, просвещения, в 1921–24 возглавлял Государственное издательство, организовал первое издание Большой Советской Энциклопедии (1926–47), в 1927–30 входил в Президиум Госплана. Был профессором Московского лесотехнического института (1920–1923), затем – Московского университета (1923–1951), где в 1929 организовал на мехмате кафедру Высшей алгебры, которой руководил до

Он был убеждённым марксистом и носителем новой идеологии, имел глубоко продуманные представления о том, что такое наука[95]. Шмидта можно считать последовательным экстерналистом. Он полагал, что наука не является самодостаточной деятельностью и находит источник развития в практике. Все научные задачи вытекают из нужд промышленности, торговли и транспорта. Наука является одним из орудий борьбы «передового класса» с церковью и реакционными классами. Научные открытия совершаются при практической в них потребности, а не из-за внутренней логики научного развития. Наука развивается вместе с обществом и в рамках доминирующих идеологий. Смена

1949. Был основателем московской алгебраической школы, автором новой космогонической гипотезы об образовании Земли и планет Солнечной системы. В 1924–30 преподавал в Коммунистической академии. Участвовал в географических исследованиях, принесших ему всемирную известность и, возможно, защитивших репрессиях 1930-х: в 1927 ходил в Памирскую экспедицию; в 1929, 1930, 1932, 1933, 1936 возглавлял Арктические экспедиции. В 1930 был назначен директором Арктического института, в 1932 стал начальником Главсевморпути. В 1933 был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1935 – академиком, в 1939–42 был вице-президентом Академии наук. В 1937–49 он возглавлял Институт теоретической геофизики. Указом Президиума Верховного Совета СССР от 27 июня 1937 года за руководство организацией дрейфующей станции «Северный полюс–1» О.Ю. Шмидту было присвоено звание Героя Советского Союза с вручением ордена Ленина, а после учреждения знака особого отличия ему была вручена медаль «Золотая Звезда». Правительство СССР наградило его тремя орденами Ленина (1932, 1937, 1953), двумя орденами Трудового Красного Знамени (1936, 1945), орденом Красной Звезды (1934) и медалями.

[95] Дубовицкая М.А. *«Деятельность О.Ю. Шмидта в Московском университете»*// Историко-математические исследования. Вторая серия, вып. 13 (48). – М., 2009, с. 145–147.

идеологических установок приводит к революционным изменениям в науке. Но будучи алгебраистом и занимаясь поначалу исключительно абстрактными проблемами, Шмидт нуждался в самооправдании для своих научных занятий. Поэтому он утверждал, что высшая алгебра оказывается прикладной дисциплиной, если её «прикладывать» к другим областям математики.

На Всесоюзном съезде математиков в Харькове Шмидт выступил с докладом *«Роль математики в строительстве социализма»*, который у «старых профессоров» вызвал неодобрение из-за оценки математик как науки с классовой составляющей, а для молодых, стремящихся к власти коммунистов, показался недостаточно радикальным. Не называя конкретных имён, Шмидт осудил позицию математических реалистов: «*Математика из всех наук имеет наибольший соблазн считать себя наукой надклассовой и стоящей вне жизни. Тут есть и тот соблазн, что приложение математики далеко неадекватно всему математическому творчеству, что значительная часть математиков далека от приложений. Тут есть соблазн, что математические истины вытекают, казалось бы, из совершенно особых свойств нашего ума или создаются нашим умом независимым образом, и поэтому математика может и должна оставаться в стороне от классовой борьбы и от социалистического строительства. Что касается приложений математики, то вероятно, знают заявление одного из крупнейших учёных, что ему нравится теория чисел потому, что эта часть математики, которая ещё не запятнана приложением*[96]*. Несомненно,*

---

[96] В 1940 крупный английский специалист по анализу и теории чисел Годфри Харди написал: *«Жизнь любого настоящего профессионального математика невозможно оправдать на основании одной лишь «полезности» его трудов. Здесь мне не-*

эта точка зрения довольно популярна. Есть тенденция превратить математику в особый мир, который не обязан быть ни в каком соответствии с миром действительным. Рассматривают математику как особого рода реальность. Если оказывается, что математика всё-таки приложима, то с точки зрения сторонников такого взгляда на математику, это не более чем счастливая случайность». Шмидт показал, как приложения математики могут использоваться с классовых пози-

---

обходимо коснуться одного заблуждения. Иногда высказывается мнение, что чистые математики приписывают себе в хвалу бесполезность своих трудов (мне приходилось слышать обвинения и в свой адрес, будто бы я разделяю подобное мнение...) и даже хвастаются тем, что эти труды не имеют практических приложений. Такое обвинение обычно исходит из неосторожного высказывания, приписываемого Гауссу, который якобы сказал, что если математика – царица наук, то теория чисел в силу своей абсолютной бесполезности – царица математики. Точную цитату мне так и не удалось найти. Я уверен, что высказывание Гаусса (если он когда-либо высказывал нечто подобное) весьма грубо искажается. Если бы теорию чисел можно было использовать для любой практической и явно почтенной цели, если бы её можно было непосредственно направить на достижение человеческого счастья или утоления человеческих страданий, как в случае физиологии или даже химии, то не подлежит сомнению, что ни Гаусс, ни какой-либо другой математик не были бы столь глупы, чтобы преуменьшать такие приложения или сожалеть о них». Ниже он продолжает: *«Я никогда не делал ничего «полезного». Ни одно моё открытие не способствовало ни прямо, ни косвенно увеличению или уменьшению добра или зла и не оказало ни малейшего влияния на благоустроенность мира. Я помогал воспитывать других математиков, но математиков такого же рода, как и я сам, и их работы, во всяком случае в той части, в которой я помогал им, были столь же бесполезны, ка и мои собственные работы. По любым практическим меркам ценность моей математической жизни равна нулю, а вне математики она, так или иначе, тривиальна»*. (Харди Г.Г. *«Апология математика»*. – Иж.: НИЦ РХД, 2000, с. 75, 90.)

ций: «*Товарищи статистики, например, знают, очень хорошо, что делают с нашей наукой. Всем известны формулы Пирсона, – математическое содержание они имеют небольшое, это также всем известно, нужно только откровенно сказать. Однако использование этой формулы принимается как нечто глубоко научное и обоснованное, и если какое-либо социальное явление на каком-то отрезке времени располагается по кривой, которая похожа на кривую Пирсона, то постулируется, что это явление происходит согласно какой-то кривой Пирсона и делается предсказание о том, что в дальнейшем будет так. Американская литература заполнена такими предсказаниями, и в частности американская экономическая литература, применяя такого рода кривые, предсказала, как известно, дальнейшее развитие и процветание Америки, а вот там произошел кризис, которого формула Пирсона как раз не предусматривала. В этом виновато неправильное использование, лжеиспользование математики, которое служит для прикрытия целей, ничего общего с математикой не имеющих*»[97]. Но найденных Шмидтом классовых образчиков математических приложений оказалось недостаточно. Ему припомнили «аполитичную», написанную в махистском духе статью *«Алгебра»*, в которой он ещё до опубликования «Диалектики природы» Ф. Энгельса не предвосхитил «верного» определения математики, не отразив её классовой природы. Шмидта критиковали за недостаточность высказываний по методологическим вопросам и «*смазывание вопросов классовой борьбы вокруг методологии математики*». Раздражало его заявление о наличии «*знака равенства между методом*

---

[97] Шмидт О.Ю. *«Роль математики в строительстве социализма»*// Труды первого Всесоюзного съезда математиков (Харьков, 1930). – М.-Л.: ОНТНКТП СССР, 1936, с. 29–30.

современной науки и диалектическим материализмом», что характеризовалось как апологетика буржуазной науки.

Борьба С.А. Яновской за материалистическую диалектику в математике. В сборнике с выразительным названием *«На борьбу за материалистическую диалектику в математике»* (1931) С.А. Яновская[98] опубликовала разгромную рецензию на матема-

[98] Яновская (Неймарк) Софья Александровна (1896–1966) – советский историк и методолог математики. В 1915–17 училась на Одесских Высших женских курсах. С 1918 в ВКП(б). В Гражданскую войну служила в Красной Армии – политработником на фронте, в Политуправлении XII армии. В 1920–23 работала в Одесском губернском комитете партии, в 1923–1929 училась на естественном отделении Института красной профессуры, в МГУ посещала математические семинары Д.Ф. Егорова и В.В. Степанова. С 1925 руководила семинаром по методологии математики и естествознания в МГУ, который посещали А.Н. Колмогоров, Л.А. Люстерник, А.О. Гельфонд, П.К. Рашевский, И.В. Арнольд и А.П. Юшкевич, преподавала математические курсы в ИКП. Первую научную статью *«Категории количества Гегеля и сущность математики»* опубликовала в журнале «Под знаменем марксизма» в 1928, в 1929 – в журнале «Естествознание и марксизм» написала *«Закон единства противоположностей в математике».* В 1930-х организовала работу по изучению и подготовке к публикации математических рукописей Маркса. В 1933 в журнале «Под знаменем марксизма» напечатала статью *«О математических рукописях Маркса».* За свою жизнь опубликовала около 70 научных работ. В 1931 была утверждена профессором МГУ и ИКП. В 1935 получила учёную степень доктора физ.-мат. наук без защиты диссертации. В 1943 организовала в МГУ первый в СССР семинар по математической логике. Организовала перевод и издание серии классических зарубежных книг по математической логике – Д. Гильберта и В. Аккермана, А. Тарского, С.К. Клини, А. Чёрча, Р.Л. Гудстейна, а также сборников работ А. Тьюринга и Дж. фон Неймана. В 1944 организовала кафедру истории математики МГУ, руководила ею до 1955. Основала советскую школу истории математики. Была награждена многими медалями и Орденом Ленина (1951). Анализ деятель-

тические статьи первой Большой Советской Энциклопедии. Критиковался О.Ю. Шмидт, – инициатор и редактор этого грандиозного научного издания, – руководивший проектом до 1941 г.

Тезисы Яновской против Шмидта были таковы: «*математика – наука о наиболее простых, абстрактных (количественных) отношениях материальной действительности. Поэтому её легче всех других наук переодеть в идеалистический наряд, маскирующий её связь с практикой, отрывающий форму от содержания, извращающей в угоду классовой идеологии буржуазии подлинное положение вещей*»[99]; «*В БСЭ нет ни одной боевой, воинствующей, партийной статьи по математике. Более того, с её страниц иногда прямо, иногда в несколько замаскированном и «подчищенном» виде пропагандируется махизм, конвенционализм, идеализм*»[100]. Шмидт был обвинён в ошибочной редакционной политике. Ведь он заказал статьи «старым» и беспартийным профессорам и не включил в состав авторов БСЭ молодых партийных учёных. Недоверие вызвало его понимание особенностей математического знания. Яновская опознала в рассуждениях Шмидта спектр буржуазных философских идей: «*В полном согласии с Махом, алгебра трактуется не как наука об особого типа связях и закономерностях материальной действительности, а как удобный язык. Успехи математики объясняются не тем, что она правильно отразила (и зна-*

ности Яновской и отзывов о ней проведён в монографии: Бажанов В.А. *«История логики в России и СССР».*– М.: Канон+, 2007, с. 302–324.

[99] Яновская С. *«Математика в БСЭ»*// На борьбу за материалистическую диалектику в математике. Сб. статей по методологии, истории и методике математических наук, под ред. Э. Кольмана. – М.-Л.: ГНТИ, 1931, с. 305.

[100] Там же, с. 306.

чит поняла) характер некоторых простейших физических и механических закономерностей, а тем, что была изобретена удобная символика… Именно у Маха (и Богданова) наука является лишь удобным орудием приспособления к потребностям практики, а не отражением объективной действительности… Именно Мах и дал образцы такого «построения» истории науки, при котором оказались совершенно смазанными наиболее решающие, её революционные моменты. У тов. Шмидта просто исчезла революция в математике, связанная с именем Декарта, введшим в неё переменную величину, и обусловленная ростом мануфактуры, развивавшей в отдельных случаях употребление машин, расширением в эпоху великих географических открытий торговых связей и мореплавания и стимулируемым обоими этими обстоятельствами развитием механики и астрономии, или вернее она свелась лишь к созданию удобного аппарата. Таким образом из его поля зрения фактически исчезли социально-классовые корни развития математики…»[101].

Наступление на Шмидта привело к его смещению с должностей главного редактора созданных им журналов «Естествознание и марксизм» и «Научное слово». На место Шмидта был поставлен Кольман, и вскоре эти журналы перестали выходить. Шмидта отстранили и от работы в созданной им Ассоциации распространения естествознания. Но он в это время уже активно работал в арктическом проекте советского государства и продемонстрировал столь выдающиеся организаторские и научные успехи, что травля его на «естественнонаучном фронте» была остановлена. Шмидт отстранился от участия в политической и идеологической жизни математического сообщества. Сфера его дея-

[101] Там же, с. 307–308.

тельности переместилась в Академию наук и руководство Арктическим институтом.

Интересно выделить суть расхождений в понимании математики между «старыми» профессорами и диалектическими обновленцами. Последние нагружали «идеалистические» течения тонкими оттенками смыслов, почти неразличимыми вне марксистско-диалектического учения. Используемые ими термины зачастую были скрытыми цитатами из работ партийных вождей и классиков. И старые профессора пока ещё не разбирались в этом материале. Яновской, в частности, не нравилось, что о выработке математического аппарата «академики» говорят, что его «подбирают, строят, приспосабливают», но «только не отражают» – «*ибо в последнем случае нельзя было бы со всеми махистами рассматривать математику не как науку о материальной действительности, а как конфекцион готового платья, из которого физик например выбирает по произволу, что ему угодно, руководствуясь лишь соображениями «удобства» и «экономии мышления»*»[102].

Мнение самой Яновской на тему предмета математики изложено в её совместной статье с Кольманом *«Гегель и математика»* от 1931 г. Ознакомимся с развёрнутой цитатой из неё: «*То, что Гегель правильно определил предмет математики, приходится ценить особенно высоко ввиду того, что этот вопрос и сейчас ещё создает величайшие затруднения для самых различных идеалистических и эклектических философских направлений, которые, воспроизводя материальную действительность в искаженном виде, не могут найти правильного ответа на него. Так, интуиционисты (Вейль,*

---

[102] Там же, с. 309.

Броувер), идя по стопам Канта, считают предметом математики чистое созерцание a priori, тогда как логисты, причисляющие, следуя ещё Лейбницу, математику к логике, усматривают в математических аксиомах и теоремах законы разума. Формалисты, как Гильберт, отрицают вообще существование особого предмета математики, считая её простым собранием правил, позволяющих нам производить различные комбинации и преобразования; механистические эмпирики, включающие математику в физику и отрицающие её специфический характер, считают её предметом физическое пространство и физическое время; другие, как Мах, ищут её предмет в психологии и т.д. Подобные определения приводят однако к таким трудностям, которых не могла преодолеть ни одна из этих философских систем. Для того, чтобы примирить созерцание a priori с неэвклидовской геометрией, неокантианцам (Бибербах, Нельсон) пришлось, как известно, проделать немало «комических вывертов, жалких фокусов и уловок». Логисты (Рессель, Фреге) были вынуждены стать на ту точку зрения, что математика есть грамматика без подлежащего, дополнения, глагола и сказуемого, грамматика союзов, как «и», «или», «если» и т. д., и превратить её таким образом в колоссальную тавтологию, неспособную дать какое бы то ни было новое знание о предмете. Механистические эмпирики не были в состоянии включить в свою систему многомерные геометрии и оказались перед необходимостью признать лишь одну из многих математических геометрий, а остальные изгнать из математики. Формалисты, превратившие математику в своего рода шахматную игру пустыми символами, не в состоянии объяснить её роль в технике, в естественных науках и в статистике. Конвенционалисты (Пуанкаре), считающие математические понятия и операции просто удобными соглашениями, ради «экономии мышления», уклоняются от всякого *ответа на поставленный вопрос и ничего не могут сказать о развитии этих понятий. Таким образом все эти философские школы, из которых каждая схватывает и «возводит в абсолют, оторванный от материи, от природы, обожествленный» (Ленин, К вопросу о диалектике, 1915–1916 гг.) одну какую-нибудь, но только одну сторону действительности, не в состоянии понять связь математики с практикой и законы её развития. А Гегель дал такое определение математики, которое выразило сущность предмета, – определение, являющееся, собственно говоря, независимо от замысла самого Гегеля, глубоко материалистическим, если отбросить его идеалистическую исходную позицию. Математика есть, по Гегелю, наука о количестве (Quantitas), т.е. о такой определённости предметов, которая характеризует их не как таковые, в их специфическом отличии от других предметов и от них же самих на другой стадии их развития, а изучает их только с их внешней, безразличной к изменениям, стороны. «Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, то есть весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание проявляется о крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Чтобы изучить эти формы и отношения в их чистом виде, следует их оторвать совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела» (Энгельс, Анти-Дюринг, 1878 г.). Эту связь между математикой и материальной действительностью и выражает материалистически истолкованное гегелевское определение предмета математики. Пространственные отношения нашего физического пространства соответствуют требованиям этого определения, и пространственные формы действительно составляют, по Гегелю, предмет математики, хотя и не исчерпывают его, ибо всякое отношение,* *имеющее существенно различные по качеству аналогии в природе, может стать предметом математики. Так например вихри, исследуемые векторным анализом, могут быть также вихрями какой-нибудь жидкости или же относиться к электродинамике, – откуда однако не следует, что эти математические вихри суть продукт идеи, ибо они лишь отображают количественные соотношения реальной, т.е. материальной действительности. Определение Гегеля схватывает таким образом подлинную сущность математики, даёт возможность понять её связь с материальной действительностью и в то же время устанавливает границы математики, её место и роль в системе наук. С точки зрения этого определения все вышеприведенные определения могут быть не только a limine опровергнуты, но и действительно преодолены. В каждом из них могут быть усмотрены моменты истины, «та из черточек, сторон, граней познания», которая, если её односторонне преувеличить и раздуть, превращается «в оторванный от материи, от природы, обожествлённый» абсолют. Всё это становится возможным, несмотря на то, что сам Гегель не сумел до конца преодолеть односторонность этих определений. Ибо у него встречаются, часто в довольно эклектическом смешении, и такие мотивы, которые просто совпадают как с лейбницевой логистикой, так и с кантовской конструкцией математики из элементов априорного созерцания и даже с конвенционалистским и формалистическим отрицанием объективной истинности математических суждений. Так например правильно характеризуя абстрактную, формальную сущность математического метода, согласно которому «сперва устанавливаются определения и аксиомы, а за ними следуют теоремы, доказательство которых состоит лишь в рассудочном приведении к недоказанным исходным предпосылкам» (Гегель, Система философии), – Гегель в то же время сам односторонне преувели-*

чивает момент тавтологичности в математике и закрывает глаза на эволюцию этого метода, приводящую к тому, что произвольный и внешний характер аксиом снимается (хотя большинство математиков и философов математики до сих пор этого не заметили) и что в развитии математики формально-логические рассудочные моменты вытесняются диалектическими моментами. Гегель правильно отмечает наличие чувственных моментов в математике, но он слишком полагается на Канта, сводя иногда вслед за ним всё содержание математики к абстрактному чувственному созерцанию. Он согласен например с Кантом, что математика «имеет дело не с понятиями, а с абстрактными определениями чувственных созерцаний», при чём специально «геометрия имеет дело с чувственным или абстрактным созерцанием «пространства» (Гегель, Система философии). Это верно, поскольку именно в геометрии чувственный момент особенно резко выражен, но в такой абсолютной форме этого нельзя утверждать даже и по отношению к геометрии. Впрочем Гегель сам признает в дальнейшем, что даже эта наука, изучающая только абстрактные определения чувственных восприятий, «наталкивается в конце концов в своём ходе, – и это весьма замечательно, – на несоизмеримые и иррациональные величины, где она и вынуждается, если хочет двигаться дальше в процессе определения, выйти за пределы рассудочного принципа» (Гегель, Система философии). Наконец Гегель остроумно и справедливо критикует «фокусничество» и шарлатанство даже ньютоновских доказательств, пытавшихся представить опытные законы в виде результатов «вычисления», он совершенно прав в своём утверждении, что «отнюдь не каждый член математической формулы, взятый сам по себе, должен иметь предметное значение и что математическая правильность результата ещё не гарантирует реальный, т.е. соответствующий ка-

кой-нибудь действительности, смысл итогов вычисления». Однако это утверждение сводится у Гегеля одновременно и к тому, что он вообще отрицает истинность математических суждений самих по себе, что он рассматривает математику, подобно нынешним формалистам, только со стороны её внутренней последовательности, а не объективной истинности, т.е. смотрит иногда на нее только как на вычисление, а не как на науку, обладающую своим собственным предметом исследования. Поскольку математика есть наука об абстрактных количественных определениях, она в состоянии отобразить только одну сторону действительности; между нею и физикой уже есть существенное различие, узел, переход к новому качеству. Ибо физика исследует материю уже с качественной, существенной её стороны: её молекулы, атомы и электроны – уже не безразличные отношения, в которые могут взаимно вступать, не меняя своего качества, различные вещи, а именно молекулы, атомы и электроны во всём богатстве своих частных определений, своего специфического возникновения и развития. Поэтому физика не может быть сведена к математике; роль математики в науке ограничена. Эта точка зрения диаметрально противоположна кантовской, ибо ведь, по Канту, всякая наука имеет право называться наукой лишь постольку, поскольку в ней находит себе место математика»[103]. Развитие этих воззрений обнаруживается на протяжении всей советской философии математики. Но тщательная разработанность темы в рамках материалистической диалектики не привела к наблюдаемому прибавлению конкретного знания, не оставила материального следа в науке. Напротив, отчасти справедливо критикуемые «идеалистические» системы Фре-

[103] Кольман Э., Яновская С. *«Гегель и математика»*// Под знаменем марксизма, 1931, №11–12, с. 109–111.

ге, Пуанкаре, Рассела, Гильберта и Брауэра принесли в математику и естествознание плодотворные идеи и методы. Они разработали новые категории, усовершенствовали математический символизм и способствовали развитию многих разделов математики, – логики, теории множеств, топологии, анализа, алгебры, теории алгоритмов, – заложив фундамент будущих научно-технических достижений. Расхождение между марксистской декларацией преданности практике и бедностью собственно практических результатов свидетельствует о перерождении марксизма в 1930-е гг. Живое и творческое учение зримо становилось коснеющей идеологией, уютным пристанищем научных имитаторов и беспринципных карьеристов.

Э.Я. Кольман – идеолог в математике. Случайные обстоятельства привели Эрнеста Кольмана в Россию, и в смутные революционные годы он сделал эффектную партийную карьеру. Он избежал угрожающих жизни испытаний в периоды репрессий, к раскручиванию которых приложил немало стараний. Похоже, что всю жизнь он стремился социально подняться, занять не своё место и выдавал себя за кого-то другого. В материальном благополучии Кольман дожил до эпохи «застоя», почтенным старцем отрёкся от кормивших его идей и скончался в гостеприимной Швеции, немного не дотянув до 90-летнего юбилея.

Недоучившийся студент стал мучителем многих российских учёных, деловито совмещая партработу с преподаванием и участием в идеологических кампаниях. В 1930–32 гг. ему выпало возглавлять Московское математическое общество. Он руководил Институтом Красной Профессуры Естествознания с 1932 г. до закрытия заведения в 1936 г. В 1934 г. Кольман получил степень доктора философских наук, затем звание профессора математики. В 1939 г. стал старшим научным сотрудником в Институте философии АН, завотделом диалектического материализма, преподавал логику в московском юридическом институте и в педагогическом институте, вёл математические курсы в Энергетическом институте им. Молотова. Войдя в партийную номенклатуру, Кольман легко менял места работы, не удаляясь от структур, связанных с управлением наукой и образованием.

Было бы несправедливо утверждать, что Кольман не имел математических работ. Одну из них хранит российский ресурс Math-Net.Ru[104]. Статья по элементарной комбинаторной топологии вышла в престижном журнале ММО. В ней нет библиографических ссылок, что в тот период было нормально. Упоминаний её в иных статьях обнаружить не удалось. Для неспециалиста в узкой теме исследования это усложняет оценку её полезности. Первый параграф отдан определениям, но сформулированы они нематематически расплывчато, иллюстрации отсутствуют. Поэтому неясна постановка задачи, трудно оценить степень достоверности её решения. Кольман упоминает, что применяемый им метод использовался Листингом[105]. Возможно, точные определения есть в одной из его неназванных работ,

---

[104] Кольман Э. *«О разбиении круга»*// Математический сборник, 1937, т. 2(44), в. 1, с. 65–77.

[105] Листинг Иоганн Бенедикт (1808–1882) – немецкий математик и физик, геттингенский профессор с 1847. Заложил начала топологии и первым употребил этот термин.

но этот вопрос заслуживает отдельного изучения. Вторую математическую работу Кольмана[106] понять легче, тем более что в ней отсутствуют какие-либо формулы и теоремы. Статья представлена к публикации академиком Лысенко и направлена на опровержение известной работы академика Колмогорова[107]. Для скорого достижения цели Кольман сходу заявляет, что Колмогоров *«в значительной мере следует выводам Мизеса»*. Затем он приводит ряд выдержек, которых *«более чем достаточно, чтобы убедиться в том, что Мизес – махист «чистой линии» и что высказываемые им взгляды на отношение теории к действительности слово в слово совпадают с теми, которые разгромил Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме». Следовать методологическим взглядам Мизеса не только в значительной, но и в какой бы то ни было мере никому рекомендовать нельзя»*.

Отметим, что в работе Колмогорова Рихард Мизес не упоминается. В этом не было необходимости. Колмогоров имел достаточную базу собственных разработок по теории вероятностей, чтобы заимствовать их у немецкого учёного, так и не завершившего свои статистические и вероятностные исследования. Кольман ввёл Мизеса вспомогательной фигурой, позволившей перевести обсуждение от вопросов статистических или биологических, в которых Кольман не разбирался, к истолкованиям мнений Ленина и Энгельса по наду-

---

[106] Кольман Э. *«Возможно ли статистико-математически доказать или опровергнуть менделизм?»*// Доклады Академии наук СССР, 1940, т. 28, в. 9, с. 836–840.
[107] Колмогоров А.Н. *«Об одном новом подтверждении законов Менделя»* // Доклады Академии наук СССР, 1940, т. 27, в. 1, с. 38–42.

манным поводам, в чём Кольман считал себя мастером. Этот приём из набора картёжных шулеров характеризует методологические принципы научной дискуссии многих «материалистов-диалектиков». Далее Кольман развивает свою гипотезу об идейной подчинённости Колмогорова махисту Мизесу: *«Вполне понятно, что тот, кто вместе с Мизесом полагает, будто теория вероятностей есть теория, проверяемая только законами мышления, кто считает, что научная теория играет по отношению к действительности (называемой махистами миром «опыта») роль одного лишь описания, не в состоянии правильно поставить, а тем более решить вопрос о границах применимости теории вероятностей, о границах её познавательного значения для отдельной науки, например, для биологии»*.

Мнимое разоблачение ошибки Колмогорова вскоре завершается: *«Таким образом, резюмируя, необходимо ещё раз подчеркнуть, что поскольку менделевские законы являются законами биологическими, никакое статистико-математическое доказательство (или опровержение) дать им невозможно. Доказать или опровергнуть закон Менделя как биологическую универсальную закономерность можно только на почве самой биологии, не отбрасывая громадный накопленный цитологический, гистологический, биохимический материал, материал по механике развития и т.д., а, критически перерабатывая его, не боясь затронуть самые основы генетики, если этого требуют упрямые факты. Извлечённый из определенной группы случаев наследования менделевский закон расщепления признаков является лишь статистическим правилом, а не универсальным биологическим законом, причем правилом, получение которого существенным образом может зависеть от выбранной нами классификации рассматриваемых признаков. Наконец, нельзя забывать, что ста-*

тистика в применении к биологии должна занимать лишь подчинённое место. Как этому учит Энгельс и Ленин, чем выше изучаемая форма движения, тем труднее применение к ней математического метода, тем менее эффективным для познания действительности он оказывается. Пытаться по всем этим причинам статистико-математически подтверждать или опровергать менделевские законы явно безнадежно»[108].

Мнимый ревнитель пролетарской истины Кольман специализировался в огульных нападках на известных учёных. Он регулярно запускал обвинительные статьи в партийные газеты и журналы. Так, в статье с доносным заголовком *«Вредительство в науке»* он зацепил О.Ю. Шмидта: *«Математической мистификации науки вредителями значительную услугу оказывают появляющиеся порою из наших собственных рядов попытки ненаучного, антимарксистского применения математического метода. Так, например, пытаются всерьёз вывести закон развития производительных сил САСШ тем, что отождествляют производительные силы с техникой, мерилом прогресса которой принимают количество запатентованных изобретений, на основании чего математически выводят зависимость между «техникой» и временем, выво-*

---

[108] Характерно, что сходные идеи о принципиальной ограниченности математических методов вне чистой математики через полвека подняты историками, недовольными хронологическими работами академика А.Т. Фоменко. Статистические закономерности, найденные в его теории, возмущённые гуманитарии встречают девизом историка А.З. Манфреда: *«Дай им волю, этим «молодым» учёным, они забросали бы книжный рынок сводками цифровых данных…»* (*«Некоторые тенденции зарубежной историографии»*// Коммунист, 1977, №10, с. 106–114). В предельной форме догматический принцип благочестиво заявил историк Д.М. Володихин: *«Гораздо важнее призыв смотреть на историю «очами веры», с которым нет причин спорить»* (*«Иван Грозный. Бич Божий»*. – М.: Вече, 2012, с. 154).

дят законы движения индекса цен, зарплаты, нормы прибыли и т.д. Такие грубо-эмпирические упражнения, затрагивающие лишь поверхность явлений, действуют ободряюще на тех, кто «математизирует» науку с вредительской целью. Ведь каждая наша ошибка с жадностью подхватывается классовым врагом. Так, например, Н.В. Игнатьев спешит зафиксировать трогательное единство мысли главы буржуазной американской политико-экономической школы и учёного-коммуниста, не упуская в то же время случая выразить глубокую благодарность Кондратьеву, как редактору сборника, содержащего игнатьевскую статью со следующей тирадой «Количественная теория денег, находившая подтверждение и в эмпирических данных (назову здесь хотя бы работу проф. Фишера, а у нас работу О. Шмидта для периода эмиссионного хозяйства), вызывает простотой своих формулировок большой соблазн к статистической моей проверке»[109].

Кольман громил старых профессоров и косвенно Лузина, которого обвинял в незнании диалектики и не только. Темой его выступлений была «аполитичность» Шмидта и «вредительство» Егорова. Дадим ещё один пример риторики Кольмана. Напомним, что это был 1931 г. – шёл первый вал сталинских репрессий и «чисток» государственных учреждений: «*Подмена большевистской политики в науке, подмена борьбы за партийность науки либерализмом тем более преступна, что носителями реакционных теорий являются маститые профессора, как махист Френкель в физике, виталист Гуревич и Берг в биологии, что Савич в психологии, Кольцов в евгенике, Вернадский в геологии, Егоров и Богомолов в математике «выводят» каждый из своей науки реакционнейшие социальные теории. Разве нехарактерно –*

---

[109] *Кольман Э. «Вредительство в науке»*// Большевик, 1931, №2, с. 76–77.

если взять лишь события последнего месяца – что признанного вождя реакционной московской математической школы, ещё в прошлом году директора математического института, состоявшего церковным старостой, но не желавшего быть членом профсоюза, проф. Егорова московское математическое общество упорно не желало исключить из своего состава. Когда же Егоров заявил, что «не что-либо другое, а навязывание стандартного мировоззрения учёным, является подлинным вредительством», докладчик-коммунист не только сам не дал отпора, но в заключительном слове отвёл предложение сделать из выступления Егорова организационные выводы, объяснив всё «недоразумением». Такова политика некоторых коммунистов проводимая ими в реакционнейшей профессорской среде, в среде хранителей традиций Цингера, Бугаева, Некрасова, разрабатывавших теорию вероятностей, науку о числе и анализ для доказательства незыблемости «православия, самодержавия, народности», для подкрепления философии Лопатина в среде тех людей, которые вполне последовательно на недавнем съезде отказывались послать приветствие XVI съезду»[110].

В 1936 г. Кольман опубликовал объёмную работу[111], желая дать в ней канон математики и её истории. Книга должна была стать основой понимания философии математики. Ведь автор опирался на сочинение Энгельса *«Диалектика природы»*, впервые опубликованное в 1929 г., и на *«Математические рукописи»* Маркса, обнаруженные Кольманом в сейфе Рязанова, чьё место заведующего кабинетом Маркса он занял в ИМЭЛ. Кольман ознакомился с записками Маркса ещё

[110] Там же, с. 78–79.
[111] Кольман Э. *«Предмет и метод современной математики»*. – М.: ГСЭИ, 1936, 316 с.

до их подготовки к публикации группой историков математики под руководством Яновской. В своей книге Кольман синтезировал материалы читанных им в Московском университете курсов по историческим и философским проблемам математики. Историю дисциплины он изложил широко, но без продуманной системы. В столь же хаотическом изложении математических идей и понятий содержались серьёзные ошибки, отчасти отмеченные в рецензии известных математиков А.О. Гельфонда и Л.Г. Шнирельмана. Члены-корреспонденты Академии наук дали на сочинение Кольмана безжалостное заключение: «*в книге неверно передан ряд важнейших вещей из самых различных отделов математики. Трудно указать такую область математики, которая была бы корректно освещена в разбираемой книге. Общие рассуждения о математике в целом отличаются туманностью и не дают ничего ни уму, ни сердцу*»[112].

Однако в замысел книги легла самостоятельная методологическая идея – представить историю математики в развитии её абстракций (числа и фигуры, переменных алгебры и анализа, их операций и функций). Книга начинается с определения математики, претендующего стать стандартом для советской науки: «*Определение Энгельса гласит, что математика – это наука, имеющая своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Из этого определения ясно, что математика не может считаться только наукой о природе или только наукой общественной, ибо пространствен-*

[112] Гельфонд А.О., Шнирельман Л.Г. *«Э. Кольман, «Предмет и метод современной математики»»*// Успехи математических наук, 1938, №4, с. 336.

ные формы и количественные отношения присущи как естественным, так и общественным процессам»[113].

Последняя глава книги Кольмана наиболее идеологизирована. Она посвящена кризису оснований математики и описанию основных философских программ математики – логицизма, формализма, конвенционализма, интуиционизма, эмпиризма, эффективизма, отнесённых к идеализму и противостоящих истинно верной философии диалектического материализма. Суть философских направлений математики Кольман изложил умело, мастерски подкрепив избранные идеи цитатами из сочинений основоположников течений, показывая своё понимание сложности проблем. Оценки Кольмана демонстративно пристрастны и критичны. Так, одобрив Пуанкаре за его критику логицизма и формализма, Кольман обнаруживает у него «*двойное нутро философии конвенционализма*». Кольман осудил Пуанкаре за мнение о двух неразделимых источниках аксиом – обобщённом опыте и первичных понятиях, принятых научным сообществом и влияющих на истолкование опытов. Кольман порицает все определения математики, кроме одного энгельсова, объявляя поверхностными мыслителями всех математиков, их придерживающихся: «*Определение Пуанкаре математики как «искусства давать одно и то же имя различным вещам», как две капли воды, похоже на определение Рассела, согласно которому «математика – это совокупность выводов, могущих быть применёнными к чему бы то ни было». Именно благодаря этому*

[113] Кольман Э. «*Предмет и метод современной математики*». – М.: ГСЭИ, 1936, с. 10.

своему философскому оппортунизму конвенционализм, «философия удобства», оказался наиболее «удобным» для многочисленного слоя математиков, знакомых с философией лишь крайне поверхностно, именно поэтому он стал наиболее популярным течением современной философии математики, даже до сих пор оказывающим кое-какое влияние на образ мышления некоторых из советских математиков»[114].

Он настойчиво преследовал ярких математиков, в особенности, Лузина: «*Известно, что так называемая «Московская математическая школа» – Цингер, Бугаев, Некрасов – проповедовала, будто «арифмология» (теория чисел и непрерывных функций) обосновывает индивидуализм, анализ с его непрерывностью направлен против революционных идей, теория вероятностей подтверждает беспричинность явлений и свободу воли, а вся математика в целом находится в соответствии с принципами философии Лопатина – православием самодержавием, народностью. Этот черносотенный образ мыслей был полностью донесён до наших дней одним из «столпов» этой школы Лузиным, который придал ему более «современную» фашистскую окраску. Вместе с тем Лузин «исправил» эту идеологию в деталях, заменив открытую проповедь православия более тонким дурманом – субъективным идеализмом и солипсизмом*»[115].

Пропагандируемая Кольманом диалектизация математики осталась нереализованным сервильным проектом: «*С точки зрения марксизма-ленинизма обоснование математики не сводится к замене логической, формалистической, интуиционистской и тому подобных систем аксиом, определений и т.д. какой то другой диалектико-материалистической системой. Оно не сводится также к несравненно более сложному*

[114] Там же, с. 274.
[115] Там же, с. 290.

труду – к построению марксистской истории математики. Оно означает вместе с тем переделку всей математики, регулирование её развития на плановых началах, исходящих из теоретического осмысления практики строительства социализма. Усвоение, критический пересмотр и коренная переработка достижений буржуазной науки – эта задача, поставленная для нашей эпохи Лениным и Сталиным, целиком относится и к математике»[116].

* * *

От диалектизации математическое сообщество спасли два счастливых обстоятельства. Во-первых, объективная сложность математического знания и связанная с этим невозможность существенно продвинуться собственно в математике, используя диалектический метод. Во-вторых, пассивное сопротивление основной массы математиков, хотя и не поддержавших публично выступление Сергея Натановича Бернштейна, но и не помогавших активистам-диалектикам.

---

[116] Там же, с. 302.

ДИАЛЕКТИКО-МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИКИ

В идеологизированной атмосфере 1930-х гг. А.Н. Колмогоров взялся написать словарную статью «Математика» для Большой советской энциклопедии. Она была опубликована в 1938 г. В ней Колмогоров дал определение математики, базовое для советской науки на несколько десятилетий. До и после Колмогорова, соединившего энгельсовское определение с изложением новых математических тенденций в их развитии, советские математики пытались давать определения своей дисциплины. Но авторитет Колмогорова сделал его версию преобладающей и приемлемой для всех.

А.Н. Колмогоров о природе математического знания. Ещё в 1929 г. Колмогоров написал статью[117], в которой проанализировал основные позиции в философии математики, симпатизируя интуиционизму[118]. С начала XX в. возрастал интерес к изучению основа-

---

[117] Колмогоров А.Н. *«Современные споры о природе математики»*// Научное слово, 1929, №6, с. 41–54.

[118] Колмогоров начал с описания трудностей на *«окраинах современной математики»* в абстрактных теориях, не мешающих классической математике, но требующих разрешения для развития новых областей математического знания. Противоречия имеют эпистемические корни: *«Когда часть математиков формулирует достаточно простой принцип теории множеств, кажущийся им очевидным, а другая её часть находит этот принцип лишённым какой бы то ни было убедительности, неизбежным становится теоретико-познавательный анализ смысла основных терминов, ими употребляемых. Дело идёт собственно о понятиях множества, его элемента и, особенно, о понятии существования. Довольно ясно, что формальное математическое определение этих понятий было бы пустой тавтологией»* (с. 42).

ний математики. Авторы концепций иногда выходили за пределы собственно математических рассуждений и опирались на ту или иную философскую теорию познания. Формализм и интуиционизм обещали разрешить все затруднения исключительно в рамках своей науки. Возглавляемые Гильбертом формалисты превращали математику в символическую игру, в которой позволено всё кроме противоречий. Интуиционисты под руководством Брауэра изгоняли из математики понятия и методы, не имеющие оснований в общей для всех интуиции. Колмогоров писал о трудности оценки формалистского проекта в силу его незаконченности. Его восхищало искусство Гильберта восстанавливать вроде бы уже забракованные математические теории. Но главная проблема подхода Гильберта в том, что он не даёт «*никакого объяснения, чем же держалась математика до настоящего времени, почему, высказывая о бесконечности суждения, не имеющие никакого смысла, математики понимали друг друга, – продиктован только неумением найти выход более удовлетворительный*»[119]. Поэтому Колмогоров обратился к концепции Брауэра. Прежде всего – ради надежды выяснить природу бесконечного. Колмогоров не отрицал наличия в интуиционизме потенциальной слабости: «*позволительно сомневаться, что интуиция и конструкция новых образов, исходя из натурального ряда, окажутся при этом надёжными руководителями. В частности, Броуэр изучает континуум в форме бесконечных последовательностей натуральных чисел, так как только в такой форме его естественно получать чисто логическими средствами. Исторически же идея континуума создалась посредством*

[119] Там же, с. 53.

идеализации действительно наблюдаемых непрерывных сред; пока трудно представить себе, как отсюда извлечь опору для развития математической теории, но только это было бы прямым путём к пониманию природы математического континуума»[120].

Колмогоров развил свою концепцию математического знания в ряде статей[121]. Логично, что именно ему было предложено написать статью «Математика» для Большой советской энциклопедии.

Эволюция статьи «Математика» в БСЭ. Первая энциклопедия СССР нуждалась в описании математики, удовлетворяющем идеологическим требованиям научных комиссаров, но вместе с тем отражающем сущность предмета. Было необходимо учитывать новейшие открытия советских историков, пропагандировавших *«Диалектику природы»* Энгельса и *«Математические рукописи»* Маркса. Поэтому в первой версии статьи в 1938 г. Колмогоров определил математику как «*науку о количественных и пространственных формах и отношениях реального мира*». А во второй версии 1954 г. и в последующих – уже как *«науку о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»*[122]. Возможно, под влиянием идеологической

---

[120] Там же, с. 54.

[121] Колмогоров А.Н. *«Современная математика»*// Фронт науки и техники. – М., 1934, №5/6, с. 25–28; *«Современная математика»*/ Сборник статей по философии математики. – М., 1936, с. 7–13; *«Теория и практика в математике»*// Фронт науки и техники. – М., 1936, №5, с. 39–42.

[122] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ Большая Советская Энциклопедия, 1-е издание. Т. 38, 1938, с. 359–405; была переработана для БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 464–483; повторена в Математической Энциклопедии. Т. 3, 1982; в Математиче-

критики Колмогоров дублировал определение Энгельса[123] 1877 г., соответствующее состоянию математики на начало XIX столетия: «*Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т.е. весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание проявляется в крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать происхождение из внешнего мира. Чтобы изучить эти формы и отношения в чистом виде, следует их оторвать от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела. Так получаются точки без протяжения, линии без толщины и ширины,* ***а*** *и* ***б****,* ***х*** *и* ***у****, постоянные переменные*»[124].

Первое определение Колмогорова можно истолковать более широко, чем последующие – он отдавал в распоряжение своей науки любые «*отношения реального мира*». Сюда можно отнести отношения причинно-следственные, логические, структурные, биологические, социальные, экономические, а не только количественные, по Энгельсу. Как мы уже видели ранее, претензии математиков на универсальность своей дисциплины никогда не нравились идеологическим работникам и номенклатурным волюнтаристам[125]. Тем не менее, Колмогоров не отказался от своих начальных

ском энциклопедическом словаре, 1988, и коротко изложена в Новом Энциклопедическом Словаре, 2002.

123 Энгельс Ф. *«Анти-Дюринг»*/ Маркс К., Энгельс Ф. *«Сочинения»*, 2-е изд., т. 20, 1961, с. 37.

124 Энгельс Ф. *«Анти-Дюринг»*/ Маркс К. и Энгельс Ф. *«Сочинения»*, т. 14. – М.-Л., 1931. с. 39.

125 Несколько позже преследование кибернетики в СССР (как и в США) было обусловлено нежеланием безответственных управленцев сдать свои выгодные позиции в экономике учёным и их компьютерам.

слов: *«Принципиально область применения математического метода не ограничена: все формы движения материи могут изучаться математически»*[126]. Но разворот его мыслей на эту тему в поздних публикациях был сокращён.

Колмогоров вместе со многими своими коллегами искренне принимал идею Энгельса о том, что математика является продуктом реального мира, а не плодом чистого воображения, как предполагал немецкий экономист, математик и философ Е.К. Дюринг. Но сразу же после цитаты Энгельса Колмогоров пояснил: *«Действительный объём этого общего определения проще всего понять, рассмотрев основные понятия и разделы М. в порядке их возникновения. Мы увидим, что само это определение таит в себе возможности развития, приобретая новый, более широкий смысл с ростом науки. При этом мы отметим и более узкие определения, которые математика уже переросла»*[127]. В последующих переизданиях эта фраза была сглажена: *«В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, так что данное выше общее определение математики наполняется всё более богатым содержанием»*[128]. Чтобы сделать статью более адекватной, Колмогоров для второго издания БСЭ добавил в неё раздел о современной математике, заметив: *«Таким образом, как в результате внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвы-*

---

[126] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 1-е изд., т. 38, 1938, с. 380.
[127] Там же, с. 360.
[128] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 464.

чайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» приведённое в начале статьи определение М. применимо и на новом современном этапе её развития»[129].

Колмогоров упорядочил описание структуры математического знания, указав математические дисциплины, в том числе не соответствующие определению Энгельса, например, математическую логику.

Периодизация истории математики по А.Н. Колмогорову. Для второго издания БСЭ 1949–60 гг. Колмогоров систематизировал сложившиеся к его времени представления об истории математики, выделив в ней четыре периода.

Зарождение математики он отнёс к древним цивилизациям Египта и Вавилона. В Древнем Египте были изобретены некоторые приёмы арифметических расчётов, записаны рецепты вычислений площадей и объёмов. В Вавилоне изобрели десятично-шестидесятеричную систему исчисления, использовали шестидесятеричные дроби, умели начислять ростовщические проценты. В эмпирических табличках вавилонян Колмогоров разглядел зарождение понятия функции.

Этап *элементарной математики* (с VI–V вв. до н.э. до конца XVI в. н.э.) начинается созданием эллинами элементарной геометрии и арифметики. Посте-

---

[129] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 476.

пенно развивались алгебра и тригонометрия, востребованные решением практических задач астрономии и геодезии. Греческая геометрия стала образцом математической теории. Ещё дольше развивалась элементарная арифметика. Понятия иррациональных и отрицательных чисел были сложными математическими абстракциями, не имеющими наглядной опоры в опыте[130]. Алгебра как буквенное исчисление была заложена в III в. н.э. Диофантом[131], но оформлена только в XVI в. Виетом[132].

Колмогоров излагает историю древней математики в марксистском духе, указывая влияние на матема-

---

[130] В отличие от более привычных натуральных чисел, дробей и геометрических фигур, востребованных в повседневной жизни.

[131] Диофант Александрийский – считается греческим учёным III в. н.э. из Египта. Автор *«Арифметики»* в 13 т., из которых известно 6. Обнаружение сочинения Диофанта приписывают астроному Региомонтану в 1463, когда тот был в Венеции в свите кардинала Виссариона. Но примерное содержание *«Арифметики»* стало известно гораздо позднее – в 1572 итальянский математик и инженер Рафаэль Бомбелли в своей трёхтомной *«Алгебре»* привёл 143 диофантовы задачи, якобы обнаруженные в Ватиканской библиотеке. В 1575 латинский текст шести глав *«Арифметики»* был опубликован Ксиландером, а в 1621 греческий текст был издан Баше де Мезириаком. В сохранившихся частях трактата изложены начала алгебры, указаны методы решения неопределённых уравнений различных степеней в рациональных положительных числах. Диофант первым для обозначения неизвестных и их степеней, обратных чисел, равенства и вычитания употреблял специальные символы – сокращения греческих слов.

[132] Виет Франсуа (1540–1603) – французский математик, создатель символической алгебры. Обозначал буквами не только неизвестные, но и коэффициенты уравнений. Это позволило выражать их корни формулами и производить арифметические действия над алгебраическими выражениями.

тику общественно-экономических факторов. Так, пифагорейские изыскания в арифметике связаны у него не только с мистикой и магией, но и с конкретными задачами строительства, навигации и землемерия. Внутренняя логика развития науки привела к тому, что греческие геометры перестали довольствоваться приближёнными, эмпирически найденными решениями и стали искать исчерпывающие решения проблем. Так было получено доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. На пути развития греческой математики стояли социально обусловленные препятствия: *«В 4 в. до н.э. в обстановке политич. реакции и упадка могущества Афин наступает эпоха известного подчинения М. ограничениям, выдвинутым идеалистич. философией. Наука о числах строго отделяется здесь от «искусства счисления», а геометрия – от «искусства измерения». Опираясь на существование несоизмеримых отрезков, площадей и объёмов, Аристотель налагает общий запрет на применение арифметики к геометрии»*[133]. Достижением математики того периода стало логическое оформление основ геометрии Евдоксом, автором теории пропорций и первого доказательства теоремы об объёме пирамиды. Расцвет античной математики поощрялся некоторыми государствами. Математики решали практические задачи: Архимед – в области гидротехники и военного дела, Эратосфен – в геодезии и картографии. Применение приближенных вычислений в прикладных задачах сочеталось с развитием математической строгости – Евклид систематизировал достижения в области геометрии и теории чисел. Теоретики позднего

[133] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 467.

метрии и теории чисел. Теоретики позднего периода в основном комментировали древних авторов.

Вслед за наукой Античного Средиземноморья Колмогоров упоминает математику Китая. К её успехам он относит нахождение правил решения небольших систем линейных уравнений и биквадратных уравнений, разбор практических примеров т.н. *«Китайской теоремы об остатках»*, развитие приближённых методов вычислений, в частности, – нахождение значения константы π с точностью до 6 десятичного знака после запятой. Колмогоров замечает не прояснённую исторической наукой связь китайской науки со средневековой европейской.

Колмогоров указал достижения индийских математиков V–XII вв.: употребление десятичной системы исчисления и нуля для обозначения отсутствующего разряда; работа не только с дробями, но и с иррациональными и отрицательными числами. Индусы решали в целых числах неопределённые уравнения двух неизвестных первой и второй степени.

Достижения арабских математиков Колмогоров видел не только в сохранении античной и индийской традиции, но и в открытии новых методов. В алгебре арабы нашли правила решения уравнений второй степени и приближённых решений уравнений высших степеней, в геометрии – изобрели тригонометрические функции, в арифметике – стали применять десятичные дроби и открыли бином Ньютона.

Историю западноевропейской математики XII–XV вв. Колмогоров традиционно преподносит периодом усвоения наследия античной и арабской математики.

Историю математики Колмогоров излагает с позиции презентизма. Например, без каких-либо оговорок относительно написания математических символов, он сообщил: «*Уже Леонардо Пизанский в сочинении «Цветок» (ок. 1225), в к-ром собраны предложенные ему и блестяще решённые им задачи, доказал неразрешимость уравнения:* $x^3+2x^2+10x=20$ *не только в рациональных числах, но и при помощи простейших квадратич. иррациональностей (вида* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *и т.п.)*»[134].

Колмогоров называл XVI в. первым веком превосходства Западной Европы над Древним миром и Востоком в астрономии и механике, а XVII в. – и в математике. Новая эра началась в Италии: Ферро (1515) и Тарталья (1530) нашли алгоритмы решения уравнений третьей степени, и вскоре Феррари (1545) – четвёртой. Виет (1591) основал алгебраическое исчисление, применив его к геометрическим задачам. Штифель (1544) открыл биномиальный закон, Стевин (1585) разработал арифметические правила для десятичных дробей. Колмогоров отметил важность XVII в. как времени создания математики переменных величин. Он отдал дань марксизму, процитировав Энгельса[135], но пояснив: «*Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых теперь М., уже не исчерпывается числами, величинами и геометрическими фигурами. В основном это было обусловлено явным введением в М. идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея*

---

[134] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 470.

[135] «*Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*» (*«Диалектика природы»*, 1952, с. 206).

зависимости между величинами (значение суммы зависит от значений слагаемых и т.д.). Однако, чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, надо было самые зависимости между величинами сделать самостоятельным предметом изучения. На первый план выдвигается понятие функции, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятие величины и числа»[136]. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей открыло путь понятиям математического анализа, *«вводящим в М. в явном виде идею бесконечного к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создаётся анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде дифференциального исчисления и интегрального исчисления, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими значений. Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задачи интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве одной из важнейших задач М.»*[137].

В геометрию пришли идеи движения и преобразования. Была создана аналитическая геометрия и обнаружен способ переведения вопросов геометрии на язык алгебры и анализа. Выяснился геометрический смысл алгебраических и аналитических фактов.

В алгебре XVII–XVIII вв. преимущественно изучались вопросы о действительных корнях уравнений, разрабатывались методы их отделения и приближённого вычисления. Даламбер не вполне строго доказал

---

[136] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 471.
[137] Там же.

«основную теорему алгебры» – о наличии комплексного корня у непостоянного алгебраического уравнения.

Развитие новой математики, по Колмогорову, было связано с созданием в XVII в. математического естествознания, нацеленного на объяснение отдельных природных явлений действием общих, математически сформулированных законов природы. Эволюция понятий математики соотносилась с осмыслением соотношений действительного мира, например, понятие производной вытекало из реальности понятия скорости в механике.

Колмогоров дал краткий очерк математических открытий в их взаимной обусловленности. Так, важной вехой дифференциального и интегрального исчисления стало открытие логарифмов Непером. Он обосновывал свои логарифмические таблицы непрерывным течением логарифма при изменении его аргумента. Так Непер ввёл представление о непрерывной функции, не заданной алгебраическим выражением или геометрическим построением. Создав координатный метод в геометрии, Декарт предложил классификацию кривых с подразделением их на алгебраические и трансцендентные. Исследования Ферма о максимумах и минимумах, разыскание касательных к кривым – содержат ещё не осознанные приёмы дифференциального исчисления. Астрономические исследования Кеплера и провозглашение «метода неделимых» Кавальери при определении объёмов тел вращения – стали ещё одним источником исследования бесконечно малых. В работах Ферма, Паскаля, Валлиса по нахождению площадей победило свободное употребление бесконечно малых. Одновременно Валлис, Меркатор, Ньютон, Лейбниц, Я. Бернулли развивали учение о бесконечных рядах.

Колмогоров высказался об авторстве открытия дифференциального и интегрального исчисления и о сути методов Ньютона и Лейбница: «*В отношении публикации приоритет этого открытия принадлежит Г. Лейбницу, давшему развёрнутое изложение основных идей нового исчисления статьях опубликованных в 1682–1686 гг. Наоборот, в отношении времени фактического получения основных результатов имеются все основания считать приоритет принадлежащим И. Ньютону, который к основным идеям дифференциального и интегрального исчисления пришёл в течение 1665–1666 гг. «Анализ с помощью уравнений» Ньютона в 1669 г. был передан им в рукописи английским математикам И. Барроу и Дж. Коллинзу и получил известность среди английских математиков…. Подход к делу у Ньютона и Лейбница, однако, различен. Для Ньютона исходными понятиями являются понятия «флюенты» (переменной величины) и её «флюксии» (скорости её изменения). Прямой задаче нахождения флюксий и соотношения между флюксиями по заданным флюентам (дифференцирование и составление дифференциальных уравнений) Ньютон противопоставлял обратную задачу нахождения флюент по заданным соотношениям между флюксиями, т.е. сразу общую задачу интегрирования дифференциальных уравнений…. Такая точка зрения была естественна для Ньютона как создателя математического естествознания: его исчисление флюксий являлось просто отражением той идеи, что элементарные законы природы выражаются дифференциальными уравнениями, а предсказание хода описываемых этими уравнениями процессов требует их интегрирования. Для Лейбница в центре внимания находился* *вопрос о переходе от алгебры конечного к алгебре бесконечно малых; интеграл воспринимался прежде всего как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых, а основным понятием дифференциального исчисления являлись дифференциалы – бесконечно малые приращения переменных величин»*[138].

Колмогоров указывал социальные аспекты развития математического сообщества. Он отметил, что в XVII в. ещё не произошло строгой специализации научного сообщества, и математики были одновременно физиками-экспериментаторами и философами. А в XVIII в. и особенно в XIX в. математики уже идентифицируют своё профессиональное сообщество, хотя математическое естествознание и технические приложения остаются важной сферой деятельности: Эйлер занимался вопросами кораблестроения, Лагранж создал основы аналитической механики, а Лаплас внёс существенный вклад в астрономию и физику.

Период *современной математики* (XIX–XX вв.) знаменуется расширением предмета математики, изучением возможных типов количественных отношений и пространственных форм: сюда относятся отношения между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, разнообразие форм многомерных пространств.

Колмогоров показал, как накопление материала в предыдущие периоды привело к его логическому анализу и объединению с новых позиций. Новые тенденции проявились в открытии и исследовании комплексных чисел и функций комплексного переменного,

---

[138] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 473.

в создании неевклидовой геометрии. Более сложной и менее очевидной становится взаимосвязь математики и естествознания. Новые теории стали возникать из внутренних нужд математики, как например – теория функций комплексного переменного Коши и *«воображаемая геометрия»* Лобачевского. Ранее найденные математические факты получили новый запрос естествознания. Так, теория групп, идущая от Лагранжа, изучавшего подстановки для разрешения в радикалах алгебраических уравнений, после результатов Абеля и Галуа, определений Кэли и Ли была применена Фёдоровым и Шенфлисом к описанию строения кристаллов, подчинённого групповым законам. В 1920–30-е гг. теория групп стала применяться в квантовой физике. В зависимости от запросов механики и физики возник и развивался векторный и тензорный анализ. Стало ясно, что с точки зрения механики и физики «скалярные» величины, отражаемые в понятии действительного числа, являются частным случаем величин многокомпонентных. Суть векторного и тензорного исчисления – в рассмотрении функциональных зависимостей между ними. Функциональный анализ перенёс векторные и тензорные методы в бесконечномерную ситуацию и оказался востребованным квантовой физикой.

Новизна современного этапа математики, по Колмогорову, заключается в сознательном и активном расширении изучаемых форм. *«Если прежде, напр., введение в употребление отрицательных и комплексных чисел и точная формулировка правил действий с ними требовали длительной работы, то теперь развитие М. потребовало выработки приёмов сознательного и планомерного создания новых геомет-*

рических систем, новых «алгебр» с «некоммутативным» или даже «неассоциативным» умножением и т.д. по мере возникновения в них потребности»[139].

В течение XIX в. произошла перестройка всего склада математического мышления – была подорвана вера в незыблемость освещённых традицией аксиом, осознана возможность создания принципиально новых математических теорий, признано, что кажущиеся абстрактными математические теории могут находить конкретное практическое применение.

По Колмогорову, особенность предмета математики – в изучении количественных отношений, сохраняющих от конкретной действительности, от которой они отвлечены, только то, что предусмотрено в их определении. Преимущественно дедуктивный характер математики предопределяется тем, что все свойства чистых отношений должны содержаться в их определении. Применимость математических теорий в различных конкретных областях естествознания и техники обусловлена тем, что математика изучает такие связи, которые безразличны к конкретной природе объектов. Принципиальная новизна современной математики – в создании методов изучения общих и разнообразных отношений.

На понимание предмета и особенностей современной математики влияли интенсивные дискуссии об её обосновании в первой четверти XX в. Произошёл критический пересмотр исходных положений математики, была построена строгая система определений и

---

[139] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 476.

доказательств. Необходимость такой работы проистекала из изменившихся взаимоотношений между развитием математических теорий и возможностями их практической проверки на материале естествознания и техники. Отложенная на десятилетия проблема проверки абстрактных теорий поставила вопросы об оценке строгости математических доказательств.

Концепция строения математической теории в понимании Колмогорова такова. К концу XIX в. оформился стандарт логической строгости, которому должна соответствовать математическая теория. Источником стандарта стала теория множеств. Математическая теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных некоторыми отношениями. Аксиомами задаются формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории. «*В соответствии с этим теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при её развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние*»[140]. Отсюда вытекает, что математическая теория, применимая к какой-либо системе объектов, автоматически применима и к любой изоморфной[141] системе.

---

[140] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 477.

[141] *«Изоморфизм»* – буквально означает *«однообразие»*. Отношения изоморфных объектов с любыми иными того же рода неразличимы. Колмогоров пояснял, что употребляет термин изоморфизм как математическую идею *«моделирования»* явле-

Колмогоров считал, что теоретико-множественная концепция позволяет систематизировать разные математические теории. *«Так, чистая алгебра определяется как наука о системах объектов, в которых задано конечное число операций, применимых (каждая) к определённому конечному числу объектов системы и производящих из них новый объект системы»*[142]. Этим она отличается от анализа и геометрии, где необходимо введение предельных отношений, связывающих бесконечное число объектов.

Колмогоров указывал преемственность развития математических теорий. В изложении более специальных теорий используются ранее построенные теории. Например, в теории вероятностей применяются понятия натурального и действительного числа. Последовательное аксиоматическое изложение математических теорий облегчает понимание и позволяет избегать ошибок при продвижении к всё более сложным и общим образованиям. Благодаря привлечению идей теории множеств в конкретные математические исследования почти исчезли длительные неясности и разногласия по вопросу корректности определений и убедительности доказательств отдельных теорем.

Колмогоров замечает, что изложенная в теоретико-множественном понимании система аксиом ограничивает область применения данной математической теории, определяет свойства изучаемых объектов, но

ний из какой-либо одной области явлениями иной природы. В этом же контексте системы объектов можно представлять особыми структурированными объектами (или объектами некоторой категории в математическом смысле).

[142] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 477.

не даёт указаний относительно средств развития этой теории. Строение математической теории освещает математическая логика. Она рассматривает теории как дедуктивные и ищет способы решения математических проблем. Логическая дедукция разворачивается из конечного числа аксиом построением сколь угодно длинных цепей рассуждений, состоящих из звеньев, принадлежащих к конечному числу фиксированных для данной теории элементарных способов логического вывода. Математический алгоритм позволяет решать некоторый класс проблем строго определённым способом. В математической логике созидается общая теория алгоритмов. Колмогоров видел большие перспективы применения теории алгоритмов в вычислительной технике.

Колмогоров указал различие теории теоретико-множественного вида и теории дедуктивной. *«Было обнаружено, что понятие математической теории в смысле теории, охватываемой единой системой аксиом теоретико-множественного типа, существенно шире, чем логическое понятие дедуктивной теории: даже при развитии арифметики натуральных чисел неизбежно неограниченное обращение к существенно новым способам логического рассуждения, выходящим за пределы любого конечного набора стандартизированных приёмов»*[143].

* * *

Марксистский подход к истории математики проявляется у Колмогорова при описании взаимного влияния математики, естественных и технических дисциплин друг на друга. Колмогоров отмечает связь мате-

---

[143] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 478.

математики с практическими запросами общества. Изначально потребности общества в математике сводились к подсчёту предметов, измерению площадей земельных участков, счёту времени, планированию архитектурных сооружений и т.п. Математические исследования проводились с весьма ограниченным запасом основных понятий. И даже исследования в механике и физике удовлетворялись теми же основными понятиями. Только астрономия, задолго до развития математического естествознания в XVII–XVIII вв., предъявляла математике особенные требования, вызвав развитие тригонометрии. В XVII в. математики по запросу естествознания и техники начали изучать процессы движения, изменения и преобразования. С XIX в. связь между математикой и другими науками становится всё запутаннее, поскольку новые теории стали возникать из внутренних потребностей математики.

Признание первостепенности вненаучных факторов возникновения и развития математического знания является характерным элементом концепции математического знания А.Н. Колмогорова. Его экстернализму в некоторой степени оппонировал тяготевший к интернализму А.Д. Александров. Он принадлежал ленинградской математической школе.

А.Д. Александров о математике и её методе. *Александр Данилович Александров* (1912–1999) – выдающийся российский математик, геометр. В 1929 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1933 г. Своими основными учителями Александров считал геометра и алгебраиста Б.Н. Делоне и физика В.А. Фока. В 1935 г. он защитил кандидатскую диссертацию по физико-математическим наукам, в 1937 г. стал доктором физ.-мат. наук. В 1942 г. Александров был награждён Государственной премией СССР. В 1946 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1964 г. – академиком. В 1952–1964 гг. Александров был ректором Ленинградского государственного университета.

С ректорской позиции он поддержал университетских биологов в их борьбе с академиком Лысенко. В октябре 1990 г. Александрова наградили орденом Трудового Красного Знамени за вклад в сохранение и развитие генетики и селекции. Из-за административных и академических проблем он оставил руководство ЛГУ и в 1964 г. переехал в Новосибирск, где до 1986 г. возглавлял один из отделов Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения АН. Одновременно он работал профессором Новосибирского университета. С апреля 1986 г. Александров работал в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова.

А.Д. Александров развивал синтетический подход к дифференциальной геометрии. Открытые им методы изучения метрических свойств поверхностей привели его к решению ряда классических проблем. В частности, он разработал метод разрезывания и склеивания, позволивший решить многие экстремальные задачи теории многообразий ограниченной кривизны. Отдельный цикл работ его относился к хроногеометрии – основаниям теории относительности.

Научные интересы Александрова были широки и разнообразны. С 1950-х гг. его интересовала методология и история математики. Вместе с А.Н. Колмогоровым и М.А. Лаврентьевым в 1953 г. он организовал публикацию методологической книги *«Математика, её содержание, методы и значение»* и написал её вводную главу *«Общий взгляд на математику»*.

Александров начинает определение математики почти по Энгельсу, называя её *«наукой о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания. Первый и основной предмет математики составляют количественные и пространственные отношения и формы…. В математике изучаются и другие отношения и формы, в частности в математической логике – формы логического вывода, в геометрии n-мерные пространства, которые, конечно, не являются пространственными формами в обычном смысле слова, но имеют прообразы в действительности, например в виде множества всех возможных состояний той или иной механической системы (так называемое фазовое пространство системы). В общем в предмет математики могут входить любые формы и отношения действительности, которые объективно обладают такой степенью независимости от содержания, что могут быть полностью отвлечены и отражены в понятиях с такой ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы дать основание для чисто логического развития теории»*[144]. Затем он замечает, что в современной математике также рассматриваются объекты логически возможные, задаваемые на основе уже известных форм и отношений. Примером таких являются *«мнимые»* числа и *«воображаемая»* геометрия. Поэтому математика также есть наука о логически возможных, отвлечённых от

---

144 Александров А.Д. *«Математика»*/ Александров А.Д. *«Избранные труды, т. 3. Статьи разных лет»*. – Новосибирск: Наука, 2008, с. 258.

содержания формах, или *«о системах отношений, так как форма есть система отношений частей целого, а отношения в математике фигурируют как система отношений между какими-либо абстрактными объектами»*[145]. В этом пояснении видится новое, оригинальное определение предельной общности.

Александров не относил математику к естественным наукам, поскольку она отвлекается от содержания и не допускает внутри себя наблюдение и эксперимент в качестве доказательных аргументов. Математика зародилась из практики естественных наук, но в ходе долгого накопления знаний, прояснения понятий и связей между отдельными результатами она превратилась в чистую математику, развитие которой, продолжая сопровождать естествознание, всё-таки существенно расширяет её предмет, восходя к более высоким ступеням абстракции. При этом наблюдается удивительный феномен – отвлечённые построения математики, возникшие внутри неё самой, без прямого запроса естествознания и техники, находят в них плодотворное применение. Так, смысл мнимых чисел, появившихся в алгебре, долгое время оставался неясен, пока им не было дано геометрическое истолкование. Созданная вскоре теория функций комплексной переменной стала действенным средством решения чисто технических вопросов – о подъёмной силе крыла или о просачивании воды под плотинами при строительстве гидроэлектростанций. Другой пример дала геометрия Лобачевского, названная им *«воображаемой»*, поскольку он не видел её реального значения. Именно она положила начало новому развитию гео-

[145] Там же, с. 259.

метрии – теории неевклидовых пространств, решающей задачи теории относительности.

В развитии математики Александров указывает значимость внутренней логики развития науки: «*Наряду с накоплением математических знаний, с установлением связей между получаемыми результатами и унификацией правил решения задач складывались теоретические способы вывода новых результатов и первые математические доказательства. В конечном итоге это привело к качественному скачку: сложилась чистая математика с ее дедуктивным методом*»[146]. Его рассуждения оппонировали колмогоровской версии истории математики. По мнению некоторых исследователей, версия Александрова «*выглядит более привлекательной для чистого математика, который нечасто задумывается над тем, сколь необычной является выбранная им сфера профессиональной деятельности. В самом деле, особенностью данной схемы является увязывание формы изложения математики с её содержанием. В качестве следствия мы получаем освящение принятого ныне способа преподавания математики на все будущие времена. Концепция А.Н. Колмогорова, связывающая дедуктивную форму математического знания с внешними по отношению к науке условиями, более открыта педагогическим новациям, так как предполагает возможность критического отношения к породившим дедуктивную форму социально-историческим условиям*»[147]. Органическое зарождение дедуктивного метода внутри самой математики противоречит общепринятым представлениям об истории науки. Ведь, по Александрову, дедуктивный метод должен

---

[146] Там же, с. 263.

[147] Бычков С.Н. *«Математика в историческом измерении»*// Вопросы истории естествознания и техники, 2003, №3, с. 95–110.

возникать везде, где накапливался достаточный объём математических знаний. Однако считается, что математическая традиция Китая и Индии имеет многотысячелетнюю непрерывную историю, а математика в них так и не стала дедуктивной наукой. Также считается, что идея логического построения теории на основе немногих общих положений имеет исключительно древнегреческое происхождение, не объяснимое какой-то особой математической одарённостью греков. Исторические материалисты полагают, что научные результаты древних эллинов являются следствием их общественных условий жизни[148].

Периодизация истории математики по А.Д. Александрову также имеет особенности. Александров

148 В подобном рассуждении немало логических недочётов. Так, долгая научная история Китая и Индии была сочинена в середине XX в. Даже поверив в неё, трудно ожидать, что научный успех является непосредственным итогом растраченных усилий. Также нелегко разглядеть в жизни греческих скотоводов и рыбаков условия, благоприятные для развития дедуктивного метода математики. Чему более способствовали обстоятельства европейского Ренессанса: правовая конкуренция, публичные конфессиональные споры, практика университетских диспутов. Это подстегнуло развитие методов недогматической аргументации. Недаром математики Европы зачастую были юристами или теологами, и почти всегда они окончили университет. Аксиоматико-дедуктивный метод сложился лишь к XIX в. Евклид не ведал об аксиомах или постулатах и не употреблял этих терминов. Для него одни математические предложения были более ясными, чем иные, и поэтому попадали в фундамент доказательства. Но размышления на эту тему условны. Исторические теории недедуктивны. Много факторов их лежат за логическими пределами, составляя основу мировоззрения. Историческое знание зависит от навязанных обществом представлений. Математический подход может их проявить, помочь осознанию методов нематематических теорий, что представляется интересной задачей.

отрицал детерминирующий кумулятивизм науки, отмечая, что развитие математики не сводимо к накоплению теорем, а являет собой качественное изменение от одного периода к другому. Подобно Колмогорову, он также выделял четыре этапа, опираясь на общепринятые исторические представления. *Первый этап, – зарождения математики,* – длился от появления первых навыков счёта и измерения до оформления математики в самостоятельную теоретическую науку. Т.е. с древнейших времён до V в. до н.э. Для Александрова значим древнегреческий рубеж появления *«чистой математики»* с её логической связью теорем и доказательств. Для того времени характерна непосредственная связь науки с практикой и выведение отдельных правил из опыта. *Второй период – элементарной математики.* Он начался в V в. до н.э. и закончился в XVII в. н.э. Александров выделял в нём подпериоды развития геометрии до II в. н.э. и развития алгебры от II до XVII вв. «*Греки не только развили и привели в стройную систему элементарную геометрию в том объёме, в каком она дана в «Началах» Эвклида и преподаётся теперь в школах, но достигли гораздо больших результатов. Так, они изучили конические сечения: эллипс, гиперболу и параболу; доказали некоторые теоремы, относящиеся к началам так называемой проективной геометрии; разработали, руководствуясь потребностями астрономии, геометрию на сфере (I в.н.э.), а также начала тригонометрии и вычислили первые таблицы синусов (Гиппарх – II век до н.э. и Клавдий Птолемей – II в.н.э.); определили площадь сегмента параболы, доказав что она составляет 2/3 площади прямоугольника, содержащего этот сегмент…*»[149]. Александ-

[149] *«Математика, её содержание, методы и значение»*/ Под

ров сомневался в удивительных успехах древнегреческих математиков, но допускал их возможность: «*Грекам была известна даже, например, такая теорема, что из всех тел с данной площадью поверхности наибольший объём имеет шар, но доказательства её не сохранилось, и едва ли греки владели полным её доказательством, столь оно трудно; оно было впервые найдено в XIX веке посредством интегрального исчисления*»[150]. Он верил, что древние греки вплотную подошли к *«высшей»* математике, например, Архимед – к интегральному исчислению для вычисления площадей и объёмов, Аполлоний – к аналитической геометрии для исследования конических сечений. Но у них не было понятий для произвольных постоянных и переменных величин, и необходимой буквенной формы обозначений. Через тысячу лет Декарт заложил аналитическую геометрию, начав её с греческих задач. Александров высказал закон развития научных идей: «*Старые теории, порождая новые и глубокие задачи, как бы перерастают сами себя и требуют тогда для развития новых форм, новых идей. Эти новые формы и идеи для своего возникновения могут требовать иных условий*»[151]. При этом Александров, как и большинство историков математики до и после него, не задумывается о реальной возможности трансляции математического знания через *«тёмные»* века, при фактической утрате живой практики и математической традиции в Европе. Его не беспокоит проблема понимания греческих математических текстов в арабских переводах, при отсутствии культурного и языко-

---

ред. А.Д. Александрова, А.Н. Колмогорова, М.А. Лаврентьева. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 35.

[150] Там же, с. 35.

[151] Там же, с. 36.

вого единства в эпоху европейского Ренессанса. Он излагает общее мнение: «*При возрождении наук европейцы учились у арабов и знакомились с греческой наукой по арабским переводам. Книги Эвклида, Птолемея, Аль-Хорезми в XII в. впервые перевели с арабского на латинский – общий научный язык Западной Европы того времени. В то же время в борьбе с прежней системой счёта, идущей от греков и Рима, постепенно укрепляется в Европе индийское исчисление, заимствуемое у арабов. Только в XVI в. европейская наука, наконец, впервые превзошла достижения своих предшественников. Так, итальянцы Тарталья и Феррари решили в общем виде: первый – кубическое, второй – уравнение четвёртой степени… В этот же период впервые начинают оперировать с мнимыми числами (пока чисто формально, без какого-либо реального обоснования, которое выясняется гораздо позже, в начале XIX века. Вырабатываются также современные алгебраические обозначения и, в частности, появляются буквенные обозначения не только неизвестных, но и данных чисел: «a», «b» и т.п. … тогда же появляются в Европе десятичные дроби…*»[152].

Третий период наступил в XVII в. Это этап *математики переменных величин, появления и развития анализа*. В XVI в. центральной задачей естествознания стало исследование движения, для чего понадобилось развитие понятийного и методологического аппарата математики. Так, понятия переменной и функции были введены для обобщения конкретных величин и зависимостей между ними. При описании этой стадии Александров рассуждает о закономерностях появления и развития математических теорий. Он отмечает, что теории не возникают в результате образования новых

[152] Там же, с. 40.

понятий, и, следовательно, анализ не мог явиться из одних понятий переменной и функции. «*Для создания теории, и тем более целой области науки, какой является математический анализ, нужно, чтобы через них открывались новые взаимосвязи, чтобы они позволяли решать новые задачи… сами новые понятия зарождаются, развиваются, уточняются, обобщаются только на основе тех задач, которые они позволяют решить, только на основе тех теорем, в которые они входят. Понятия переменной и функции не возникли сразу в готовом виде у Галилея, Декарта, Ньютона или кого-либо ещё. Они зарождались у многих математиков (как, например, у Непера в связи с логарифмами), поэтому приняли более или менее отчётливую, но далеко не окончательную форму у Ньютона и Лейбница…*»[153].

В этот период была создана аналитическая геометрия. В её рамках планиметрические задачи решают следующим методом: уравнению от двух переменных сопоставляют линию на плоскости. Затем по функциональным свойствам уравнения исследуют геометрические свойства соответствующей линии, и, наоборот – по геометрическим свойствам линии находят и изучают её уравнение.

Четвёртый этап развития математики – современный. Он начался в XIX в. со значительных нововведений: возникла неевклидова геометрия, в алгебру вошла теория групп, в анализ – теория бесконечных множеств. В XX в. количественно и качественно расширился предмет математики, и умножились области её приложения. Появились новые теории и методы. Соединение анализа, алгебры, математической физики и геометрии создало функциональный анализ, играю-

---

[153] Там же, с. 43.

щий в современной математике важную роль. В середине XX в. новые математические перспективы открыла вычислительная техника. Она дала возможность вести расчёты с исключительной скоростью и решать такие задачи, которые ранее были практически недоступны. Созданы новые обобщающие понятия, более высокие ступени абстракции. В современной математике доминирует теоретико-множественная точка зрения, суммирующая предшествующий материал. Этому периоду присущ глубокий анализ основ математики, изучение зависимости её понятий, структуры отдельных теорий, поиск новых способов математических доказательств. «*Определяющую особенность современной математики можно видеть в том, что её предмет составляет уже не только данные, но и возможные количественные отношения и формы. В геометрии речь идёт не только о пространственных, но и о сходных с пространственными, возможных отношениях и формах. В алгебре же речь идёт о разных системах абстрактных объектов с возможными законами действий над ними. В анализе переменной становится не только величина, но самая функция рассматривается как переменная. В функциональное пространство объединяются все функции того или иного типа, т.е. возможные зависимости между переменными*»[154]. Таким образом, Александров определил современную математику, как науку о возможных количественных отношениях и формах, а также взаимосвязях между ними.

Закономерности развития математики. А.Д. Александров в указанной выше работе написал о сущности математики и её истории, попытался указать закономерности её развития. Предмет математики –

[154] Там же, с. 60.

реальные формы и отношения действительности, отделённые от их содержания. Математика – продукт работы многих поколений. Возникнув в древности, она постоянно изменяется, но её главные понятия и выводы сохраняются, накапливаясь от эпохи к эпохе. Новые теории включают в себя прежние, обобщая и дополняя их. Периоды революционных, качественных преобразований предмета и методов сменяются временем накопления, расширения и усовершенствования имеющегося. Расширение сферы математики происходит за счёт включения в неё новых областей количественных отношений. С ростом результатов математика переходит к новым, обобщающим понятиям, углубляя анализ основ. «*Отвлекаясь от конкретного, вращаясь в кругу своих абстрактных понятий, математика тем самым отделяется от эксперимента и практики, а вместе с тем она лишь постольку является наукой (т.е. имеет познавательную ценность), поскольку опирается на практику, поскольку оказывается не чистой, а прикладной математикой. Говоря несколько гегелевскими словами, чистая математика постоянно «отрицает» себя как чистую математику; без этого она не может иметь научного значения, не может развиваться, не может преодолевать неминуемо возникающие внутри неё трудности*»[155]. Математические теории в формальном виде противостоят реальному содержанию как некоторые схемы для конкретных выводов. В таком виде математика выступает как метод формулировки количественных законов естествознания, как аппарат для разработки его теорий и решения задач.

[155] Там же, с. 71.

Отметим, что указанная статья *«Общий взгляд на математику»* имеет выраженный идеологический характер. Александров развил в ней последовательный диалектико-материалистический подход к математике. Рассуждая о математике, он изобильно цитирует *«Анти-Дюринг»* Энгельса. Он выделяет принципиально важные положения, формирующие *суть диалектико-марксистского подхода к математике*: математика – отражает действительность, так как возникла из практических нужд людей; математика имеет своим предметом определённый вполне реальный материал, но рассматривает его в полном отвлечении от конкретного содержания и качественных особенностей; возможность применения абстрактных математических теорий к исследованию реального мира основана на том, что она заимствована из самого мира и выражает часть присущих ему форм. Александров суммирует – объективное безразличие к содержанию исследуемых в математике форм определяет её особенности: умозрительность, логическую необходимость выводов, широкие возможности приложений. «*Возвращаясь теперь к суждению Энгельса о математике, мы видим, какая глубина и богатство содержания, какие возможности развития заключаются в этом суждении. Не будучи математиком, он дал столь глубокий анализ основ науки не только потому, что был гениальным мыслителем, но, что самое главное, потому, что владел диалектическим материализмом и руководствовался им в задаче выяснения сущности математики. Не мудрено поэтому, что никто до Энгельса и не мог дать столь глубокого и верного решения этого вопроса*»[156].

---

[156] Там же, с. 69.

Подумаем – а мог ли Александров написать что-то иное в 1953 г., для первого издания упомянутого сборника? Ведь целью книги было упреждение нового идеологического нападения на математику. Для этого следовало выработать консолидированную позицию в отношении сущности и функций своей науки. Опасения были вполне оправданы на фоне идеологических баталий в сообществах биологов, физиков и кибернетиков. Без ссылок на классиков марксизма в те времена, – и даже гораздо позднее, – не выходила ни одна философская работа. Уместные цитаты основоположников индульгировали авторов от идеологических доносов и цензурных мытарств[157]. Но дело здесь было не только в идеологической мимикрии Александрова и его коллег. Ведь несмотря на правоверную риторику и вынужденность цитирования работ Маркса, Энгельса, Ленина и т.д., многие учёные того периода, и А.Д. Александров в том числе, признавали диалектический

[157] К завершению советской эпохи созрел жанр принаучного цитатничества. По воспоминаниям философов того времени, сложились негласные нормы количества упоминаний патриархов на первой странице статьи, в первой главе монографии, – для того, чтобы работа была опубликована. Недовыполнение этих норм рассматривалось как отчаянное вольнодумство автора. Разумеется, эти правила менее касались естествознания и техники. Учёные этих областей доказывали свою полезность обществу иначе, чем идеологические работники гуманитарных и социальных сфер знания. Напомним, что в СССР научная публикация приносила не только известность среди коллег, но и приличный гонорар. Ведь тиражи научных журналов и книг исчислялись тысячами экземпляров. Творческие муки автора материально возмещались государством. Особо принципиальные сочинители могли безвозмездно «писать в стол» для будущих свободных поколений или делиться идеями в «самиздате». Но все такие случаи известны наперечёт.

материализм. В СССР диамат подавил все иные мировоззрения. Другие линии материализма не получили распространения и развития. Учёные в общефилософских декларациях выражали более-менее стандартизированную позицию. И когда в 1970–90-е гг. ослабела, а вскоре исчезла идеологическая цензура, в российской философии стали модными субъективизм и постмодернизм, были воскрешены полузабытые течения, относимые марксистами к идеализму и агностицизму. Но А.Д. Александров в эти новые времена в работах по истории и философии математики по существу остался верен своим идеям 1950-ых гг.

В 1970 г. Александров уточнил специфику математического знания, отчасти позаимствовав терминологию модного в ту пору бурбакизма: «*Современный этап в развитии математики не даёт основания отказаться от её определения как науки о возможных чистых структурах… под математикой понимается совокупность формальных теорий, т.е. развиваемых по достаточно точно определённым правилам систем формальных выводов. При этом мы можем иметь в виду несколько различных уровней формализации; крайним представляется тот, который позволяет превратить теорию в определённым образом действующую машину. Но построение и исследование формальных теорий выходит за пределы математики в этом смысле и составляет предмет уже метаматематики... Подобно тому как материальная техника извлекает из природы разнообразные материалы, преобразует и комбинирует их, создавая человеку средства для овладения природой и практической деятельностью, так и математика, извлекает из природы путём абстракции свои первоначальные понятия, преобразует и комбинирует их, создавая человеку средства для теоретического* *овладения природой. Она может быть поэтому определена как «идеальная техника»»*[158].

В очерке истории математических идей *«Беседы о развитии науки»* (написано в 1971 г., опубликовано в 1988 г.) Александров сказал ещё лаконичнее: «*Математика как наука о количественных отношениях и пространственных формах действительности превратилась в науку о любых логически мыслимых отношениях и формах. В предмет математики входит любая структура, которую можно мыслить без противоречия путём логического рассуждения с достаточной строгостью и богатством выводов. Найдёт ли эта мыслимая структура применение и прообраз в действительности – это уже не вопрос математики*»[159].

Некоторыми исследователями наследия А.Д. Александрова по истории и философии математики высказывалось мнение, что он совсем не учитывал внешние факторы развития науки, в частности – влияние естественных дисциплин на постановку математических проблем, на разработку методов решения прикладных задач. С этим трудно безоговорочно согласиться. Ведь у него мы находим и такие строки: *«В античном обществе не было и не могло быть условий для перехода к высшей математике; они наступили с развитием естествознания в новое время, а это развитие в свою очередь было обусловлено в XVI–XVII вв. новыми потребностями техники и промышленности и было связано, таким образом, с зарождением и развитием капи-*

---

[158] Александров А.Д. *«Математика и диалектика»*/ Александров А.Д. *«Избранные труды. В 3-х т.: Т. 3»*. – Новосибирск: Наука, 2008, с. 281.
[159] Александров А.Д. *«Беседы по истории науки»*/ Александров А.Д. *«Избранные труды. В 3-х т.: Т. 3»*. – Новосибирск: Наука, 2008, с. 514.

тализма…»[160]. Но эти слова, скорее, результат идеологических и философских оснований мировоззрения Александрова, чем полностью осознаваемая позиция. Он пробовал осмыслить и описать социальное влияние на науку. В тех же *«Беседах по истории науки»* он приводил отрывок из *«Пневматики»* Герона Александрийского, доказывая, что уже в глубокой древности эксперимент был научным доводом. При этом он пропускал многие интересные вопросы. Например, как при низком научном и техническом уровне развития Древней Греции могли возникнуть математические задачи, скажем, сферической геометрии, требующие развитой тригонометрии? Ведь у эллинов отсутствовал соответствующий понятийный и методологический аппарат. Его создали в Европе лишь к XVII в. Допустив потенциальную возможность материально не мотивированного научного открытия, опережающего на века своё время, спросим – каким образом оно будет адекватно транслироваться через эти же века, постоянно дублируясь и истолковываясь людьми, не владеющими нужными понятиями? Возможное разовое чудо должно для этого стать чудом повторяющимся – «обыкновенным». Что ухудшилось по сравнению с условиями Древней Греции, чтобы ординарные чудеса в современной научной жизни перестали случаться? Можно ли это исправить, или у таких чудес есть реальное прозаическое объяснение? Может ли исключительно математический интерес воплотиться в древнем обществе с его

---

[160] *«Математика, её содержание, методы и значение»*/ Под ред. А.Д. Александрова, А.Н. Колмогорова, М.А. Лаврентьева. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 37.

скудными ресурсами и техническими возможностями, в то время как в более развитом и изобильном мире стимулами для развития науки почти всегда являются практические потребности?[161] Можно ли правильно понять древние математические работы после длительного разрыва научной традиции? Почему в отношении Античности и Средневековья нарушается закон накопления знаний, проявляющийся, в частности, в ускорении роста объёма научного знания, как это видно из современной истории? А.Д. Александров принимал принцип кумулятивизма научного знания для периода Нового времени: «*… по мере развития анализа нарастала необходимость его обоснования, более строгого и систематического, чем то, какое давали первые творцы его действенных методов: Ньютон, Эйлер, Лагранж и другие. Создаваемый ими анализ по мере своего роста, во-первых, шёл к всё более и более глубоким и трудным задачам, а во-вторых, самый его объём требовал уже большей систематичности и продуманности его основ. Так, количественный рост теории необходимо порождает задачу её лучшего обоснования, систематизации и критического обзора её основ*»[162]. В очерках истории науки он дал обзор сведений на эту тему, упорядочив их так, чтобы показать растущую сложность научного знания и его общественную пользу.

---

[161] Александров полагал, что древние греки интересовались коническими сечениями из чистого любопытства, но в Новое время учёные решали вполне реальные задачи. Исследований конических сечений потребовали открытия эллиптичности гелиоцентрической орбиты Марса и параболического движения брошенных тел.

[162] *«Математика, её содержание, методы и значение»*/ Под ред. А.Д. Александрова, А.Н. Колмогорова, М.А. Лаврентьева. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 51.

* * *

В своей версии истории математики, созданной в 1950-е и уточняемой в 1960–80-е гг., А.Д. Александров держался сложившейся схемы развития мировой цивилизации. В большей степени его интересовало выражение специфичности и значимости математического знания для общества, чем представление полной реконструкции развития научных идей. Он предполагал, что существуют какие-то правила или закономерности эволюции математических теорий, представляемые следующим образом. Новые задачи часто возникают в связи с нуждами техники и естественных наук. По мере создания методов их решения всё значимее становится осмысление основ и упорядочение набранного материала. Наступает период критики, систематизации и обоснования. Формулируются начальные определения понятий. Развивающаяся наука уточняет и изменяет их. Установление принципов теории – это итог её создания, который не становится её завершением, а способствует последующему движению.

А.Д. Александрова можно счесть последовательным сциентистом, хотя сам он себя так не называл и вряд ли бы согласился с такой спецификацией. Ближе к концу жизни он уделял много сил популяризации науки и её истории. Наука, в его видении, пребывает в центре культуры, а в центре науки должен находиться человек, не только как творческая личность, но как предмет и конечная цель любой деятельности и размышлений. Наука задаёт вопросы *«Как?»* и *«Для чего?»* Настоящее научное исследование руководствуется единственной бесспорной ценностью – стремлением к истине. Оно «*направляется заинтересованностью исследователя, который не стремится заранее извлечь из объекта какую-либо пользу, а хочет лишь узнать и понять*»[163]. Знание открывает перед человеком большие возможности, способствует его духовному обогащению, расширяет свободу. Поэтому стремление найти истину и бескорыстно поделиться ею стало моральным принципом современной науки. «*Идея истины – это то звено, которое скрепляет науку и этику. Убрав её, мы не только разъединим их, но и разрушим – разрушим и этику, и науку*»[164]. Интеллектуальная честность, осознание ответственности за истину, совесть учёного, состоящая в безусловном, бескомпромиссном и бескорыстном стремлении к знанию и отстаивании его – основные компоненты мировоззрения А.Д. Александрова. Следование этим ценностям – общественный долг учёного. Изучение истории науки даёт нравственные образцы должного поведения: «*История науки чрезвычайно интересна и поучительна. Она богата волнующими событиями такими, как суд над Г. Галилеем; как опыты Пастера с прививками от бешенства и другие полные драматизма и мужества моменты борьбы учёных с болезнями и смертью…; как идейный разброд среди математиков по поводу оснований и смысла их науки, когда в начале нашего столетия, казалось, само стройное и величественное здание математики может рухнуть в значительной части; … Она открывает нам пути человеческого гения в общеисторическом его явлении и в*

[163] Александров А.Д. *«Наука и этика. Доклад на совещании по истории и методологии науки (Звенигород, 1983)»*/ Александров А.Д. *«Избранные труды. В 3-х т.: Т. 3»*. – Новосибирск: Наука, 2008, с. 255.
[164] Там же, с. 256.

личностях выдающихся учёных. История науки раскрывает замечательный человеческий феномен – познание»[165]. Знакомство с историей науки создаёт необходимую перспективу понимания её современного состояния.

Материалистическое понимание геометрии П.К. Рашевским. Советский математик *Пётр Константинович Рашевский* (1907–1983) окончил Московский университет в 1928 г. Он активно участвовал в научном семинаре по тензорному анализу своего научного руководителя – Вениамина Фёдоровича Кагана (1869–1953) – основателя московской дифференциально-геометрической школы. В 1931 г. Рашевский окончил аспирантуру и в 1933 г. в качестве кандидатской диссертации представил восемь опубликованных статей по разнообразным вопросам дифференциальной геометрии. В 1930–34 гг. он преподавал в Московском энергетическом институте, в 1931–41 гг. – в Индустриально-педагогическом институте им. К. Либкнехта, где заведовал кафедрой геометрии, с 1938 г. он стал работать в Московском университете, где с 1964 по 1983 гг. возглавлял кафедру дифференциальной геометрии. В 1934 г. Рашевский стал профессором, в 1936 г. защитил докторскую диссертацию «Полиметрическая геометрия». В сферу его научных интересов входили самые различные отрасли математики: риманова, аффинная и созданная им полиметрическая геометрия; геометрия однородных, расслоенных, сим-

---

[165] Александров А.Д. *«Беседы по истории науки»*/ Александров А.Д. *«Избранные труды. В 3-х т.: Т. 3»*. − Новосибирск: Наука, 2008, с. 509.

метрических пространств; проблемы аксиоматики; представления групп и алгебр Ли и многое другое.

В нашем контексте интересна работа[166] Рашевского 1960 г., где представлено его понимание предмета и метода геометрии. Без предварительного обсуждения статуса математических объектов Рашевский объясняет реалистическую в платоновском смысле позицию в математике знакомством с этим предметом в раннем возрасте: *«Когда мы изучаем геометрию впервые – так, как она преподаётся в школе, - в нашем сознании возникает своеобразный мир идей, которые странным образом и реальны и прозрачны одновременно. В самом деле, мы рассуждаем о прямых линиях, о плоскостях, о геометрических телах (например, о шаре) и т.д., приписывая им вполне определённые свойства. Но где и в каком смысле существуют эти вещи в таком виде, в каком они служат предметом нашего изучения? … что же мы изучаем в геометрии? Как будто только призраки, создания нашего воображения, чуждые материальному миру. Но мы твёрдо знаем и из повседневного опыта, и из технической практики, что законы и правила, выведенные для этих призрачных объектов, с непреодолимой силой подчиняют себе материальную природу»*[167]. Ответ на вопрос о сути математических образов даёт материалистическое понимание мира. На примере одномерной протяжённости Рашевский объясняет появление понятия линии. Геометрические понятия и утверждения отражают свойства материальных предметов

---

[166] Рашевский П.К. *«Геометрия и её аксиоматика»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 73–98. Является переработанным вариантом вступительной статьи Рашевского к советскому изданию 1948 г. *«Оснований геометрии»* Гильберта.
[167] Там же, с. 73.

и законы материального мира. Так называемая «идеальность» есть абстрагирование от несущественных в данной связи свойств материальных вещей. «*Законы геометрии обязательны для природы потому и постольку, поскольку они из неё извлечены*»[168]. Принципиально, что истины геометрии, отражая материальную действительность, воспроизводят её приближённо, в упрощённом и схематизированном виде. За счёт отвлечения от множества запутанных обстоятельств возникает стройность и законченность геометрической теории. По этой причине геометрия Евклида ограниченно приложима к исследованию материального мира. Развитие естествознания, появление новых экспериментальных данных потребовало более гибких форм абстракции, способных более точно отображать свойство протяжённости, включая в рассмотрение то, что ранее исключалось.

Геометрия не является простым набором фактов, самостоятельно значимых в отдельности. Все положения в ней связаны сетью логических зависимостей – одни положения необходимо следуют из других. Рашевский спрашивает – как можно охватить всю систему формально логических связей геометрии? Способ к тому даёт аксиоматическое построение геометрии. Оно позволяет получить в геометрической теории из формально логических умозаключений всё максимально возможное. Часть положений принимается в качестве достоверных – аксиом, и на основании их логическими умозаключениями получаются все остальные положения – теоремы. «*Геометрия возникает путём изуче-*

---

[168] Там же, с. 75.

ния свойств протяжённости материальных тел. В этом смысле её положения могут и должны быть проверяемы опытным путём, и, как все положения физики, они воспроизводят материальный мир лишь в абстракции и истинны поэтому лишь приближенно. Геометрия становится математической теорией, когда её фактическое содержание удаётся организовать на базе определённой системы аксиом. В данной аксиоматической системе об истинности предложений говорят лишь в том смысле, что данное предложение действительно выводится из принятых аксиом»[169]. Благодаря аксиоматике содержание геометрии приобретает ясный вид, и появляется возможность описать этот вид перечислением сравнительно немногочисленных аксиом. Здесь есть и оборотная сторона – система аксиом приводит к окостенению геометрии, фиксируя её содержание. Природа сложна и многообразна – не следует искать универсальную систему аксиом, отражающую геометрические свойства материальных тел идеально точно и единственным образом. Идеализированное отражение соотношений протяжённости получило в математике множество вариантов – построены различные геометрические системы. Одни геометрии строятся непосредственным обобщением экспериментального материала. Они имеют особое значение для физики – евклидова геометрия, геометрия специальной и общей теории относительности. Другие – возникли путём сложных, многоступенчатых абстракций, и являются предметом математического изучения. В современной науке наибольшее значение приобрели такие геометрии, аксиоматика которых уже не может быть описана на эле-

[169] Там же, с. 76.

ментарно-геометрическом языке и строится на аналитической основе. Например, риманова геометрия лежит в основе общей теории относительности и заключает в себе, как частные случаи, евклидову геометрию и геометрию Лобачевского. Для создания нужных геометрических теорий современная наука пользуется аналитическими конструкциями – аксиоматика облачается в аналитическую форму. Отображая пространственные формы реального мира, математика предлагает на выбор разные схемы, наилучшая из которых выбирается посредством физического опыта.

Рашевский касается темы строгости математического доказательства. Он пишет, что до появления в конце XIX в. современного аксиоматического изложения геометрии не существовало чёткого критерия, отличающего строгие геометрические доказательства от нестрогих. В доказательствах допускались ссылки на наглядность, но не были понятны пределы их законности. Состоятельность или несостоятельность доказательства угадывалась интуитивно *«наиболее сильными умами»*, но не могла быть неопровержимо установлена. После осознания того, что наша интуиция, наши наглядные представления, дающие вполне определённые указания, не могут соответствовать всем различным геометриям одновременно – была сделана ставка на аксиоматический способ построения, на использование логической связи геометрических предложений. Рашевский высоко ценил аксиоматику Гильберта и строгость доказательств, ею открываемую: «*Гильберту удалось сконструировать аксиоматику геометрии, расчленённую настолько естественным образом, что логическая струк-*

тура геометрии становится совершенно прозрачной. Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развить геометрию, если класть в её основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом, на которые естественным образом расчленяется аксиоматика»[170].

Но казавшийся поначалу простым и гладким путь Гильберта, – отметил Рашевский, – обнаружил немало подводных камней, что серьёзно усложнило поставленную им задачу.

* * *

Диалектико-материалистическая концепция математики давала внятный ответ на вопрос о возникновении математического знания и статусе математических объектов. Математики, её развивавшие, со всей очевидностью понимали, что по мере эволюции математических дисциплин связь математических образов с материальным миром становится всё более сложной, и для появления новых математических теорий всё большее значение приобретают факторы, обусловленные внутренней логикой развития математических идей. Эта философия математики была создана выдающимися отечественными учёными, внесшими существенный вклад во многие области математического знания. Их глубокое понимание сущности современной науки и определённая просвещённость в отношении её истории позволили сделать эту концепцию жизнеспособной и плодотворной. Например, её можно было эффективно использовать в качестве теоретического фундамента в историко-

---

[170] Там же, с. 81–82.

математических исследованиях. И к тому же она удовлетворяла потребность в историко-методологической рефлексии работающих математиков, не приходя в противоречие с официальной, государственно поддерживаемой идеологией. Большой удачей для советских математиков стало то, что О.Ю. Шмидт, А.Н. Колмогоров и А.Д. Александров решились адаптировать учение диалектического материализма к философии математики и своим научным авторитетом утвердили свою умеренно идеологическую версию. Тем самым была ликвидированы предпосылки для острых идеологических баталий в математике, имевших печальные последствия для других дисциплинарных сообществ.

ИСКУШЕНИЕ БУРБАКИЗМОМ

«Архитектура математики» Н. Бурбаки. В 1960-м г. в СССР вышел перевод[171] статьи Бурбаки *«Архитектура математики»*. Эта работа 1948 г. была высоко оценена во всём мире из-за стремительно растущего влияния математиков, работавших под этим псевдонимом[172]. Их суждения о сущности математики привлекли всеобщее внимание и воздействовали на советских математиков.

В статье высказано несколько важных положений. При всём многообразии математики, её объединяет

---

[171] Бурбаки Н. *«Архитектура математики»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 99–112. Статья вышла и в приложении к русскому переводу книги *«Eléments d'histoire des mathématiques»* (1960): Бурбаки Н. *«Очерки по истории математики»*. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259.

[172] Никола Бурбаки – псевдоним неформальной, в основном французской корпорации математиков. В 1935 некоторые выпускники Высшей нормальной школы Парижа решили подать всю современную математику на строго аксиоматической основе. В начальном составе активно работали – А. Вейль, А. Картан, Ж. Дельсарт, Ж. Дьедонне, К. Шевалле. Позже к ним присоединились другие. Одновременно в группе состоят 10–20 чел. Участие в группе, кроме научных заслуг, подразумевает определённую молодость – по достижению 50-и лет полноправное членство заканчивается. Тот же срок был отведён самому Бурбаки, но он работает до сих пор. Подражая Евклиду, соавторы назвали своё руководство *«Элементами математики»*. Оно отличается крайней абстрактностью. В 1939–2012 выпущено 27 оригинальных французских томов по 11 дисциплинам. О количестве томов и датах их выхода есть разногласия. Виной тому – переиздания, конфликт с первоиздателем *«Hermann & C»* и склонность к мистификациям. Вместе с *«Элементами»* публикуются *«Труды семинара Н. Бурбаки»* – обзоры новейших достижений в математике, с 1948 докладываемые трижды в год на конференции группы.

аксиоматический метод. Математические теории ширятся и множатся, их изменения в полной мере уже не может проследить ни один математик. Гении, работавшие во многих математических областях, – такие как Пуанкаре и Гильберт, – исключительно редки. Большинство же остальных, даже весьма сильных учёных, являются чужаками в некоторых сферах математического мира. Кажущийся вывод из этого – математика не имеет единого предмета и метода и представляет собой группу дисциплин, опирающихся на частные понятия, как-то связанных друг с другом. Бурбаки утверждают, что эволюция математики привела к объединению её частей, и возникло синтезирующее ядро – аксиоматический метод.

Логический формализм – это лишь собственная часть аксиоматического метода, не исчерпывающий его. Очевидную мысль о том, что дедуктивное рассуждение является для математики объединяющим началом, – ведь каждое математическое рассуждение является логической последовательностью высказываний, – Бурбаки развивают: «*Способ рассуждения, заключающийся в построении цепочки силлогизмов, является только трансформирующим механизмом, который можно применять независимо от того, каковы посылки, к которым он применяется, и который, следовательно, не может характеризовать природу этих последних... это лишь внешняя форма, которую математик придаёт своей мысли, орудие, делающее её способной объединяться с другими мыслями, и, так сказать, язык, присущий математике, но не более того. Упорядочить словарь этого языка и уточнить его синтаксис – это значит сделать полезное дело, и эта работа и составляет действительно одну из сторон аксиоматического метода, а именно ту, которую следует назвать ло-*

гическим формализмом (или, как ещё говорят, «логистикой»)»[173]. Аксиоматический метод позволяет постичь суть математики. Он даёт уверенность в том, что математика – не простое ожерелье силлогизмов и не хитрое искусство произвольных сближений, но внутренняя связь между математическими структурами[174].

Главными объектами математики[175] объявлены математические структуры. Это понятие применяется к множеству элементов несущественной природы. На нём задаются отношения, связывающие его элементы определёнными условиями – аксиомами этой структуры. Построение аксиоматической теории данной структуры – это выведение логических следствий из аксиом структуры, без каких-либо других предположений о рассматриваемых элементах. Структурные отношения – разнообразны, но поддаются типологизации. Первый тип – алгебраический. Отношения здесь подчиняются некоторым законам композиции многоместных функциональных операций на множестве. Второй тип образуют как-то упорядоченные множества. Третий тип – топологический. Здесь математически уточняются интуитивные пространственные представления о близости, пределе и непрерывности.

---

[173] Бурбаки Н. *«Архитектура математики»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 101–102.

[174] Латинское слово *«структура»* означает *устройство* – некоторую организованную совокупность, *строение*. И поэтому математические структуры Бурбаки увязывают с представлением об архитектуре всей математики.

[175] До XIX в. математические объекты считались идеализированными абстракциями чувственного опыта. Потом стали сводить математические понятия к целым числам, и после Георга Кантора – к множествам.

Математическая интуиция приобретает в генезисе открытий всё большее значение, несмотря на стандартизацию и экономию математических орудий. Бурбаки пишут: «*«Структуры» являются орудиями математика; каждый раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определённого типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он был бы должен мучительно трудиться, выковывая сам средства, причём их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы*»[176]. Аксиоматический метод не сводит математику к машинным алгоритмам, поскольку основную роль в математическом творчестве играет интуиция.

Математическая интуиция далека от угадывания правильного положения вещей. Математик столь часто оперирует математическими объектами, что они для него приобретают реальность предметов окружающего мира. Каждая математическая структура несёт в себе «*интуитивные отзвуки той специфической теории, откуда её извлёк аксиоматический анализ*». Когда математик неожиданно открывает эту структуру в изучаемых явлениях, это событие прокладывает новое русло для его интуитивного потока мыслей.

Бурбаки дали оригинальную концепцию организации математического мира. В их идеализированном математическом мире возобладает иерархия структур.

---

[176] Бурбаки Н. *«Архитектура математики»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 107.

Центральное положение отдано порождающим структурам. Они могут быть различными. Но среди них есть наиболее общие. При их насыщении дополнительными аксиомами получаются структуры более узкие[177]. За пределами простых структур располагаются сложные. Они одновременно содержат несколько порождающих структур, органически связанных аксиомами[178]. Далее следуют частные теории, в которых элементы множеств получают большую индивидуальность[179]. Бурбаки принимают изменение математических структур по их набору и сущности. Дальнейшее развитие математики, по их мнению, будет сопровождаться увеличением количества фундаментальных структур.

Бурбаки отказались рассуждать об онтологическом статусе математических объектов. Их удивляет возможность связи физических феноменов и математики: «*То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, – это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем. … Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено нема-*

---

177 Например, теория групп, помимо положений, справедливых для всех групп, содержит теорию конечных групп, теорию абелевых групп и конечных абелевых групп.

178 Так, топологическая алгебра изучает алгебраические структуры, определяемые законами композиций и топологией, связанных условием непрерывности алгебраических операций.

179 Так возникают классические теории: анализ функций действительного или комплексного переменного, дифференциальная или алгебраическая геометрия, теория чисел.

ло труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта «макроскопическая» интуиция в действительности скрывает «микроскопические» явления совсем другой природы, причём для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложения к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что «истины», из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают своё применение этим частным случаем. … В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм»[180].

Переводу *«Архитектуры математики»* сопутствовала заметка[181] советского математика, кибернетика Алексея Андреевича Ляпунова. Он отметил необходимость систематизации современной математики и программный характер статьи Бурбаки – одного из самых продуктивных и влиятельных научных объединений. Ляпунов указал важность аксиоматического метода в кибернетике (без упоминания этого термина) и заключил: «*Авторы с большой убедительностью показывают, что аксиоматический метод изучения основных матема-*

---

[180] Бурбаки Н. *«Архитектура математики»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 111–112.
[181] Ляпунов А.А. *«О фундаменте и стиле современной математики (по поводу статьи Н. Бурбаки)»*// Математическое просвещение. Вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960, с. 113–115.

тических структур является весьма прогрессивным. Он содействует вскрытию внутреннего родства внешне далёких математических теорий, позволяет расширять границы применимости математических методов, позволяет освобождаться от несущественных ограничений в общих теориях и содействует развитию новой плодотворной математической интуиции. Можно к этому прибавить, что именно аксиоматический метод служит основой самых широких приложений математики к разнообразнейшим сторонам человеческой деятельности. Наблюдающаяся в наше время экспансия математической мысли приводит к необходимости опираться на аксиоматический метод при решении задач, возникающих на почве автоматизации управления производством, использования вычислительных машин как подсобного средства умственного труда, в математической лингвистике, математической экономике и математической биологии… широкое применение аксиоматических методов необходимо прежде всего для прикладной математики. … Мне кажется, что Бурбаки обращают недостаточное внимание на прикладное значение аксиоматической концепции. С этим связано и то, что взаимоотношения между математическими и общефизическими теориями … представляется авторам случайным и привходящим обстоятельством. На самом деле единство материального мира обуславливает то, что при самых различных обстоятельствах возникают однотипные связи»[182]. Философско-методологические идеи самого Ляпунова будут рассмотрены немного ниже.

По поводу ключевой идеи Бурбаки о главенстве в математике структурированных множеств можно заметить, что вскоре она получила интересное развитие и в некотором смысле – завершение. Ещё в 1944 г., в

[182] Там же, с. 114.

связи с аксиоматизацией теории (ко)гомологий топологических пространств, близкие к Бурбаки С. Эйленберг (1913–1998) и С. Маклейн (1909–2005) ввели понятия *категории* и функтора. Эйленберг позаимствовал понятие категории из логики Аристотеля, придав ему строгий математический смысл. Напомним, что аристотелевская категория – это необобщаемое понятие. Очевидно, что в таком определении предполагается неявный контекст. Категория Эйленберга и Маклейна – и есть тот самый контекст, в котором математическое понятие (а точнее – структура) является категорией по Аристотелю. Вскоре оказалось, что категории и соответствия между ними, – функторы, – имеют универсальный характер. Все известные на то время математические понятия вовлекались в категорное рассмотрение. Заведомо категоризуемы математические структуры. Действительно, множества одной структуры могут допускать отображения, сохраняющие структурные отношения. Такие отображения были названы морфизмами *(«сохраняющими форму»*). Структурированные множества и их морфизмы образуют математическую категорию. Её аксиоматические свойства выражаются исключительно на языке морфизмов, задающих сами структуры, и поэтому множественный характер носителей структур в категории может быть забыт. Теория категорий изучает математические объекты с относительной, фигурально, – «социологической» точки зрения. Она позволяет освободиться от вспомогательных, субъективных особенностей математических объектов. При этом категории, устроенные из структурированных множеств, естественным образом погружены в категорию множеств. Обнаруживаются причины погружаемости аксиоматизированных категорий в категорию множеств, то есть, их *«конкретности»*. Ученик С. Эйленберга (через Д.А. Буксбаума) П. Фрейд (р. 1936) в 1964 г. привёл пример *«неконкретной»* категории[183]. Её объекты не могут рассматриваться как множества и тем самым структурами не являются. Внешняя категорная характеризация математических объектов оказалась богаче и шире их внутреннего структурного описания. Поэтому, несмотря на продолжающийся поиск новых математических структур, на них уже не возлагается несбыточных надежд[184].

* * *

В 1960–80-е гг. немало советских математиков вовлеклось в обсуждение методологии своей науки. Отчасти к тому обязывала необходимость посещения философско-методологических семинаров[185]. Учёные

---

[183] Петер Фрейд категорно охарактеризовал канторово «сверхмножество», которое множеством не является.

[184] Вскоре угасли упования на теорию категорий, как возможный фундамент всей математики, поскольку некоторые важные математические конструкции так и не получили ясного категорного описания.

[185] В советских ВУЗах и НИИ такое присутствие учитывалось в качестве общественной работы, заменяя менее невинные мероприятия. Без риска потери должности или профессиональных преимуществ такой нагрузки было не избежать. Чаще всего эти заседания были нудной идеологической обузой. Но если встречи имели неказённый формат и допускали откровенный обмен идеями, они были полезны. Хотя бы, как место общения сотрудников разного статуса в неслужебном кругу. Кто-то охотно увлекался этой темой, ведь она требовала немного сил, ответственности и специальных знаний. Конференции по философии естествознания и математики никогда не

откликались на заинтересованные вопросы философов о статусе математического знания, о месте математики, о специфике математического познания. Личные размышления о перспективах науки и её сущности, познавательных и дисциплинарных особенностях побудили многих знаменитых российских математиков, – А.А. Ляпунова, Г.Е. Шилова, М.М. Постникова, В.И. Арнольда, И.Р. Шафаревича, Ю.И. Манина и др., – обнародовать своё мнение по этим вопросам. Главным образом обсуждалось отношение математики к реальности и её положение среди других дисциплин.

А.А. Ляпунов о математических теориях и роли математики. *Алексей Андреевич Ляпунов* (1911–1973) был выдающимся и разносторонним советским математиком. В 1928 г. он поступил на физмат Московского университета, но скоро был отчислен из-за конфликта с однокурсниками. Ляпунов отказался подписать студенческое обращение о сносе церкви, поссорился с активистами и перестал посещать занятия. В 1930 г. академик Лазарев взял Ляпунова лаборантом в лабораторию сейсмики Государственного геофизического института. Здесь он занимался моделированием образования лунных кратеров, методами сейсморазведки полезных ископаемых. В 1932 г. Ляпунов стал изучать теорию множеств под руководством академика Лузина. В 1934–42 гг. он работал научным сотрудником Отдела теории функций действительного переменного в Математическом институте имени В.А. Стеклова. В 1934–39 гг. он опубликовал де-

---

были безлюдными. Их использовали для неформального общения и продвижения своей специальной области исследований.

сяток работ по дескриптивной теории множеств, экстерном сдал экзамены по университетским и аспирантским курсам, и в 1939 г. защитил кандидатскую диссертацию *«Об униформизации аналитических дополнений»*. В 1942 г. Ляпунов добровольно ушёл на фронт и служил в артиллерии командиром топовычислительного взвода. За участие в освобождении Крыма в 1944 г. его наградили орденом Красной Звезды. В 1945–51 гг. Ляпунов преподавал в Артиллерийской Академии им. Ф.Э. Дзержинского, работал в Институте геофизики АН и состоял в докторантуре Математического института. В 1950 г. он защитил докторскую диссертацию по физ.-мат. наукам *«Об операциях, приводящих к измеримым множествам»* и получил звание профессора. С 1952 г. Ляпунов преподавал на кафедре вычислительной математики мехмата МГУ. Здесь он вёл первый в СССР спецкурс по программированию. Ляпунов работал в МГУ до 1962 г., а затем возглавил отдел кибернетики Сибирского отделения АН СССР. В 1964 г. его избрали членом-корреспондентом Академии наук. В 1970 г. Ляпунов перешёл в Институт гидродинамики СО АН, организовав в нём лабораторию кибернетики, которой руководил до последних дней. В то же время он читал лекции по кибернетике и классической математике в Новосибирском университете, участвовал в создании и работе ФМШ при НГУ, организовывал школьные математические олимпиады.

Научные интересы Ляпунова были разнообразны. Он занимался дескриптивной теорией множеств, теорией вероятностей и математической статистикой, выпуклым анализом, кибернетикой (программированием на ЭВМ и автоматизацией программирования), приложениями математики (применением вероятностных методов в теории стрельбы, математической лингвистикой, машинным переводом, генетикой, геологией, систематикой), философией естествознания и педагогикой. В 1954 г. при МГУ он организовал первый в стране научно-исследовательский семинар по кибернетике. Под редакцией Ляпунова вышло 29 томов *«Проблем кибернетики»*, начали публиковаться *«Кибернетические сборники»*. С 1957 г. он участвовал в выпуске сборников *«Математическое просвещение»*.

Ляпунов переключился на кибернетику в 1950-х гг. и стал активным организатором этой дисциплины. В 1959 г. при Президиуме АН возник Научный Совет по кибернетике. Заместителем председателя Совета, академика Берга стал Ляпунов. По его почину в Новосибирске в 1969 г. успешно прошла Первая Всесоюзная конференция по теоретической кибернетике. В этой области Ляпунов занимался определением предмета исследований, классификацией задач и методов, унификацией терминологии. Он заботился о распространении новой науки. Ляпунов с соавторами выпустил программные для кибернетики работы[186].

---

[186] Первой советской публикацией по теоретической кибернетике была статья Ляпунова А.А., Соболева С.Л. и Китова А.И. *«Основные черты кибернетики»*// Вопросы философии, 1955, №4, с. 136–148. На третьем Всесоюзном математическом съезде Ляпунов вместе с Китовым, Полетаевым и Яблонским представил доклад *«О кибернетике»* (Успехи математических наук, 1956, т. 11, №2, с. 237). В 1957 в материалах Всесоюзного совещания по философским вопросам естествознания был опубликован 26-и страничный доклад Ляпунова и Соболева *«Кибернетика и естествознание»*.

Ляпунов часто писал статьи о философии науки для популярных и философских журналов, выступал на философских конференциях и конгрессах. Интерес к этой теме появился у него под влиянием Н.Н. Лузина и П.С. Новикова. Сказались и особенности профессиональной биографии – неоднократные перемены научных учреждений и специализации, новые научные интересы. Ляпунов непосредственно участвовал в дисциплинарном оформлении кибернетики, что способствовало размышлениям о методологии науки. На новосибирском Симпозиуме по методологии науки он докладывал *«О некоторых особенностях строения современного теоретического знания»*[187]. В своём выступлении Ляпунов представил оригинальную концепцию развития научного знания. Немного позднее он расширил свои идеи[188] с учётом истории развития отношений научных дисциплин с математикой.

Ляпунов выделял *четыре основных типа научных теорий* по их роли в системе знаний. К первому типу он относил неформализованные эмпирические теории, «стержневые» для естествознания: эволюционную теорию Дарвина, хромосомную теорию наследственности, теорию Павлова, учение о биосфере Вернадского. В них изучаются фактические данные, устанавливаются черты сходства и отличия, предсказываются новые

---

[187] На основе этого выступления 1963 г. вышли две статьи Ляпунова: *«Некоторые черты строения современной научной теории: Выступление на 2 симпозиуме молодых учёных»*// За науку в Сибири, 23 марта 1964; *«О некоторых особенностях строения современного теоретического знания»*// Вопросы философии, 1966, №5, с. 39–50.

[188] Ляпунов А.А. *«О роли математики в современной человеческой культуре»*/ Математизация знания. – М., 1968, с. 24–54.

ещё не наблюдавшиеся явления, полезные для проверки теоретических представлений. Основные понятия здесь описательны и плохо укладываются в рамки строгих логических рассуждений. Не всегда ясно, какие стороны явления учитываются полностью, а от каких произошло отвлечение. Такая неопределённость затрудняет однозначность предсказаний, приводя к разногласиям в практическом применении.

Эмпирические теории разнятся степенью надёжности применения количественных методов. Для обработки наблюдений здесь используются статистические методы, а при необходимости создаются математические модели явлений согласно той или иной теории.

Второй тип – математические модели естественнонаучных теорий. Здесь создаются абстрактные объекты, и отношения между ними описываются в адекватных изучаемым явлениям и точных математических терминах. В рамках таких моделей возможна постановка и точное решение количественных задач. Здесь дана математическая модель индивидуальных явлений – например, теория движения муравьёв в окрестностях муравейника или модель сердца. Если модель эффективна, то она служит для объяснения наблюдаемых явлений и выбора рационального способа действий.

Третий тип – математические теории аксиоматической природы. В них рассматриваются множества элементов с определёнными отношениями или структурой связей. Перечисляются аксиомы теории, а далее изучаются их следствия. Математической основой таких теорий является канторова теория множеств. При рассмотрении этого случая Ляпунов различает два варианта: первый – когда система аксиом описывает с точностью до изоморфизма единственный объект, и второй – когда система аксиом может описывать различные неизоморфные объекты. Аксиоматические теории применяются в физике, химии, астрономии, и несколько реже – в биологии. Для примера Ляпунов привёл изучение ламинарного потока жидкости, магнитного, гравитационного или электростатического поля посредством гармонических функций. А также – описание физических явлений, обладающих симметриями, при помощи теории групп и задач математической физики на языке функционального анализа. Здесь строится математическая модель, адекватно описывающая целый класс явлений, и затем изучаются её свойства. Этот математический язык используется для описания тех классов явлений, где модель приложима с достаточной точностью.

К четвёртому типу Ляпунов относил логико-математические теории, в которых изучается не конкретный объект исследования, но сама процедура исследования. Точнее, здесь рассматривается связь между методами изучения объекта и особенностями его строения. Этим занимаются теория алгоритмов, теория моделей, теория автоматов. В этом типе теорий операции, производимые над изучаемым объектом, жёстко ограничены. «*В таких теориях оказывается невозможным опираться на канторовскую теорию множеств, которая в этих рамках получает наименование «наивной теории множеств». Приходится так или иначе ограничивать или вообще запрещать употребление принципа исключённого третьего применительно к бесконечным множествам объектов. Попытки полностью исключить в этих теориях обращение с бесконечными множест-*

вами объектов оказались безуспешными, однако пришлось строго разграничить различные процедуры над бесконечными объектами. Одни из них являются потенциально осуществимыми в том смысле, что имеется регулярно развертывающийся процесс, связанный с последовательным переходом от одного натурального числа к следующему, причём на каждом шаге этого процесса достигается всё лучшее приближение к окончательному результату. В процедурах другого типа в процессе их осуществления нет последовательного приближения к результату, и только по окончании процедуры может быть получен ответ «да» или «нет». Процедуры первого типа являются рекурсивно осуществимыми, процедуры второго типа носят общий теоретико-множественный характер»[189]. Ляпунов полагал, что этот тип теорий всё более востребован не только в естествознании, но и в общественных науках. Например, в изучении человеческого сознания, в языкознании и лингвистике. Изучая работу сознания, можно описать отдельные его акты, но нельзя составить перечень всех таких актов. Исследуя структуру человеческого общества, можно описать отдельные его части или отдельные наблюдаемые закономерности, но нельзя дать её полного описания. Формально, набор возможных вариантов конечен, но рассуждения, где мысленно представлен полный перебор всех имеющихся вариантов, недопустимы, так как этот перебор выходит за пределы человеческих возможностей. В таких случаях математические модели формализуют не только изучаемый материал, но и сами процессы изучения.

---

[189] Ляпунов А.А. *«О некоторых особенностях строения современного теоретического знания»*/ Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011, с. 148–149.

С появлением кибернетики, исследующей законы течения процессов и организации управления процессами в технике, природе и обществе, расширилось использование математических теорий. Сначала теории применяют к явлениям, для которых они и были разработаны, для прогнозирования и практических рекомендаций. Затем ранее созданные математические модели индивидуальных явлений распространяют на подобные им явления для совершенствования методов решения классов задач.

Ляпунов размышлял о совместимости теорий разных типов при описании одних и тех же явлений, об их обусловленности. Для описания эволюции научной теории он вводит понятие *интертеории*, обозначая этим концептом внутринаучную среду, в которой теория возникает и развивается. К этой среде относятся язык и специальная система понятий, используемых в теории. Интертеории содержат специфические сведения, своего рода понятийные и методологические допущения, не до конца осознаваемые и освещаемые авторами новых теорий, что вызывает критику со стороны учёных, стоящих на позиции старых интертеорий. Ляпунов заметил: «*Мне представляется, что при формировании существенно новых теоретических концепций особенно большую роль играет выяснение того, в каких интертеоретических рамках эти теории развиваются. В свою очередь интертеоретические рамки теории определяются теми внешними запросами, на которые соответствующая теория даёт ответ*»[190]. В

---

[190] Ляпунов А.А. *«О некоторых особенностях строения современного теоретического знания»*/ Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011, с. 156.

отношении математического знания Ляпунов иллюстрировал свою идею так. На уровне дискурса для изучения любой математической теории нужно понимать слова – «определение», «лемма», «теорема», а также обороты речи – «постановка задачи состоит в следующем», или «получается противоречие».

Возможен интертеоретический конфликт предпосылок теорий, который виден, например, в различии теории вероятностей и теории алгоритмов. Теория вероятностей изучает течение массовых явлений и с какой-то вероятностью предсказывает наступление некоторого события в определенной ситуации. Её интертеория предполагает априорное понимание вероятности события при массовом повторении испытания. В мизесовом представлении о вероятности рассматривается «коллектив»[191] неких испытаний, принимаемых за элементарные. В каждом из испытаний событие происходит или нет. Вероятность события, по Мизесу, – предельная частота появления этого события в независимых испытаниях. И здесь необходимо мыслить потенциальную реализуемость бесконечного коллектива независимых испытаний. Вероятность события может не существовать, если нет указанного предела, например, – если оказывается, что для некоторых подпоследовательностей событий пределы частоты оказываются разными. В теории алгоритмов иная интертеоретическая концепция. Здесь предполагается возможность неограниченного выполнения определённого набора единичных актов, приводящих к строго определённому результату. Исследуются лишь проблемы, раз-

[191] Под «коллективом» подразумевается коллекция, набор.

биваемые на счётную или конечную последовательность отдельных задач, решение которых может быть получено конечным числом названных актов. Цель теории алгоритмов – научиться отличать проблемы, решаемые схемами обозначенного выше типа, от проблем, которые в такие схемы не укладываются. «*Из сказанного совершенно очевидно коренное отличие интертеории теории вероятностей от интертеории теории алгоритмов. Если рассмотреть описанные выше интертеоретические концепции теории вероятностей с позиций интертеоретических концепций теории алгоритмов, то все они оказываются лишёнными смысла. Зато появляются принципиальные возможности некоторых новых концепций, где мизесовский коллектив рассматривается с позиций теории алгоритмов и где подпоследовательности, фигурирующие в определении понятия вероятности, считаются алгоритмически вычислимыми. Здесь возникает некоторая новая интертеоретическая концепция для своеобразной алгоритмической теории вероятностей…*»[192]. Отметим, что интертеории Ляпунова включают только знание, существенное для теоретического осмысления рассматриваемой области, с учётом возможных изменений.

Развитие математики, по Ляпунову, происходит под влиянием двух факторов. Во-первых, появление новых задач, недоступных для существующих методов, стимулирует возникновение новых идей и методов. Во-вторых, с накоплением новых методов и подходов к различным задачам обнаруживается родство некоторых подходов между собой, и возникают обоб-

---

[192] Ляпунов А.А. *«О некоторых особенностях строения современного теоретического знания»*/ Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011, с. 157–158.

щающие концепции. Усиление и расширение возможностей математики требует пересмотра её основ и всей познавательной концепции. Это приводит к появлению новых точек зрения на ограниченную группу вопросов, которые могут распространиться и на фундамент математики.

Иллюстрируя свою идею факторов развития математики, Ляпунов даёт очерк эволюции математического анализа и теоретико-множественных концепций. Классический анализ активно развивался до начала XIX в., благодаря дифференциальному и интегральному исчислению. При этом понятия «функция», «непрерывность», «сходимость» использовались интуитивно. Это вызывало чувство неудовлетворённости, и только в работах Коши были введены понятия «предела» и «непрерывности», а Лобачевский и Риман дали определение «функции». В стремлении дать точные определения и найти границы их применимости во второй половине XIX в. началась ревизия понятий математического анализа. Но оказалось, что для обоснования математического анализа этих концепций недостаточно. Выявилась *«шаткость понятия действительного числа»*. Это вызвало появление теории действительных чисел Дедекинда–Вейерштрасса и пересмотр вещественного и комплексного анализа. Но и этого было недостаточно. Кантор пришёл к своим теоретико-множественным концепциям, разлагая разрывные функции в тригонометрические ряды. Необходимость различения счётных и несчётных множеств привело к вторжению трансфинитных процессов. В математику пришла актуальная бесконечность. Кантор определяет трансфинитную индукцию и строит теорию кардинальных чисел. Назревает ещё один пересмотр оснований математики уже с позиции теории множеств. Но в ней обнаруживаются логические противоречия, порождённые использованием множества всех множеств и установлением прямого соответствия между словесными формулировками и тем смыслом, который в них вкладывается. Тем не менее, теоретико-множественные концепции внедряются в математику, и возникают общая топология, функциональный анализ, абстрактная алгебра, их активно использующие.

Поиск нового взгляда на теорию множеств был вызван очевидными её успехами и логическими проблемами её обоснования. Необходимо было найти позицию, сохраняющую всё положительное в этой теории и отсекающую всё парадоксальное. Борель, Лебег, Бэр и Адамар искали границы, отделяющие допустимое от недопустимого. Их интересовала эффективность или потенциальная осуществимость математических конструкций. Поэтому они активно обсуждали аксиому выбора Цермело[193]. Одновременно велись по-

---

[193] «*Дело в том, что множества, к которым она приводит, подчас совершенно не индивидуализированы, и вообще о множествах, которые появляются в цермелистских конструкциях, обычно очень мало можно сказать. По сути дела здесь описывается целый класс множеств, все представители которого в некотором смысле равноправны и мощность которого весьма велика. С помощью аксиомы Цермело строятся примеры неизмеримых множеств, доказывается, что всякое множество может быть вполне упорядочено. Борель, Лебег, Бэр рассматривали эти конструкции как незаконные на том основании, что их не удается индивидуализировать. Напротив, Адамар в этих конструкциях не видел ничего недопустимого*». (Ляпунов А.А. *«О роли теоретико-множественных концепций в развитии основ математики»*/ Алексей Андреевич Ляпунов.

иски аксиоматических подходов к теории множеств, точно фиксирующих все возможности теоретико-множественных построений (системы аксиом Цермело, Бернайса, Неймана и др.). Тогда же другой подход к основаниям математики разработал Гильберт. Его финитизм предполагает, что математика должна базироваться на представлении о конечном. Всё бесконечное нужно обосновывать методами из конечной области.

Ляпунов хорошо знал отечественный вклад в развитие теории множеств. Он указал причину интереса Лузина к проблемам этой теории в 1915–16 гг., а именно – обнаружение ошибки Лебега в рассуждении о проекции В-множеств. Ученики Лузина, – Суслин и Александров, – исправили эту ошибку. Они создали теорию *А*-множеств и теорию проективных множеств.

В понимании математической бесконечности возникли гносеологические затруднения. Если всё конечное видится непосредственно данным и принципиально проверяемым, то бесконечное является абстракцией по своему существу. Нет уверенности в однозначности определения бесконечного. Но даже если существуют разные варианты этой абстракции, у всех вариантов с необходимостью имеется одинаково устроенная общая часть, а ветвления начинаются в области *«более далеких представлений»*. Осознаётся задача установления границы абсолютной теории множеств и ветвящейся теории множеств. У Лузина возникли догадки о природе этой границы. Его ученик П.С. Новиков искал границу эффективности, отделяющую дос-

100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011, с. 187–188)

тупные, или однозначно решаемые классическим образом задачи теории множеств, от не решаемых в таком смысле задач. В 1930-е гг. накопились «критические» для теории множеств задачи, решение которых требовало новых подходов: построение совершенного ядра в несчётных *CA*-множествах, измеримость проективных множеств второго класса, «проблема Суслина». Следующий шаг сделал Гёдель, добавивший к стандартным аксиомам теории множеств аксиому конструктивности. Он доказал, что если исходная система непротиворечива, – что не установлено, – то она останется непротиворечивой и с новой аксиомой. Он выяснил, что в расширенной аксиоматической системе проблема континуума решается положительно, и выполняется аксиома Цермело. «*Работы по аксиоматической теории множеств показали, что те задачи, перед которыми остановилась классическая теория множеств, и, в частности, дескриптивная теория множеств, в классических условиях независимы. Они не имеют однозначного решения и действительно требуют специальных аксиом, как подозревал Лузин. В частности, отсюда следует, что дескриптивная теория множеств со своими задачами справилась полностью… решающую роль в оконтуривании изнутри возможностей дескриптивной теории множеств сыграл П.С. Новиков. Именно им были установлены результаты, которые очертили её возможности изнутри…, он сам принял деятельное участие и в установлении границы однозначного сверху – он получил ряд важных результатов, относящихся к аксиоматической теории множеств, решив ряд задач, не решаемых в классических рамках. Принципиальная роль дескриптивной теории множеств в математике сказалась не только* *в том, что она подготовила почву аксиоматической теории множеств»*[194].

* * *

Мы убеждаемся, что А.А. Ляпунов имел оригинальные идеи об эволюции математических теорий. Интерес к философии математики был естественен для его междисциплинарных научных исследований. На его понимание исторической перспективы и внутренней логики научного знания повлияли размышления учителей – Н.Н. Лузина и П.С. Новикова.

Г.Е. Шилов: от критики к признанию бурбакизма. *Георгий Евгеньевич Шилов* (1917–1975) – талантливый советский математик. В 1938 г. он с отличием окончил мехмат МГУ, затем учился в аспирантуре у И.М. Гельфанда, получал Сталинскую стипендию и защитил кандидатскую диссертацию по физико-математическим наукам *«О регулярных нормированных кольцах»* (1941). С начала войны по январь 1946 г. Шилов был артиллеристом, инженером по радиолокации в Советской Армии, заслужил много медалей, а в 1944 г. получил орден Красной Звезды за усовершенствование прибора управления огнём. В феврале 1946 г. он стал доцентом кафедры математики физфака МГУ. В 1950 г. Шилов защитил докторскую диссертацию *«Кольца типа С»* и уехал в Киев, где до 1954 г. возглавлял кафедру математического анализа мехмата КГУ. Потом он вернулся на мехмат МГУ и работал

---

[194] Ляпунов А.А. *«О роли теоретико-множественных концепций в развитии основ математики»*/ Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011, с. 191–192.

профессором на кафедре теории функций и функционального анализа.

Шилов был всемирно известным специалистом по теории функций, функциональному анализу, обобщённым функциям и коммутативным банаховым алгебрам. Он опубликовал 117 научных работ и написал около двадцати книг. Шилов организовал на мехмате МГУ научно-методологический семинар, через который прошли многие специалисты по функциональному анализу не только Советского Союза, но и некоторых социалистических стран.

Шилов имел широкие интересы вне математики. Он любил классическую музыку, прекрасно играл на рояле, пел оперные арии, собирал музыкальные записи. С 1950-х гг. он заинтересовался философией науки и искусства. Шилов дискутировал о роли науки в обществе с философом Э.В. Ильенковым.

В Центральном Московском архиве-музее личных собраний (ЦМАМЛС) хранится коллекция документов Г.Е. Шилова. Там есть материалы по истории и философии математики: отзыв на проект переиздания книги Гнеденко *«Очерки истории математики в России»* (1952); отзыв на статью Колмогорова *«Математика»* для БСЭ (1954); отзыв на *«Очерки по истории математики»* Бурбаки (1963); методологические замечания к переводу *«Оснований современного анализа»* Дьедонне (1964) и написанный под псевдонимом трактат *«Математика и действительность»* (1973).

Философские представления Шилова о науке эволюционировали от диалектического материализма к формализму Бурбаки. Он создавал свою концепцию истории развития науки, как пути от метафизики через диалектику к формализации теорий. Шилов спорил с Колмогоровым, признававшим оценки Энгельса: «*Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление…*»[195]. Колмогоров пересказал эту идею: «*С употребления переменных величин в аналитич. геометрии франц. учёного Р. Декарта и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин…*»[196]. Возражая канону, Шилов заявлял: «*Нет никаких переменных величин!*» За этим дерзким суждением скрывалась оригинальная позиция – взгляд на всю математику изнутри теории обобщённых функций, которую Шилов разрабатывал всю жизнь. Так, в 1950–х гг. он предложил к изданию забракованный рецензентами учебник высшей математики, в котором дифференцируемость функции определялась ранее её непрерывности.

Уже после смерти Шилова вышла его статья[197], в которой он описал математику в синтетическом духе. Шилов выдал себя за открывателя и комментатора найденного в Крыму, в библиотеке Черноморского отделения Морского геофизического института рукописного диалога неизвестного происхождения. Это позво-

---

[195] Энгельс Ф. *«Диалектика природы»*. – М.: Политиздат, 1952, с. 206.

[196] Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ *«Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 26»*. – М.: Главное научное издательство «БСЭ», 1954, с. 465.

[197] Георгий Кацивели *«Математика и действительность»*/ Историко-математические исследования, вып. 20. – М.: Наука, 1975, с. 11–27.

лило ему пародийно критиковать собственные суждения[198]. Редакция сборника раскрыла его псевдоним.

Статья начинается с рассмотрения двух влиятельных для советской математики позиций: марксистской, которую развили А.Н. Колмогоров и А.Д. Александров, и формализма Н. Бурбаки.

Напомним, что Бурбаки считали математику наукой о математических структурах: «*Единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры*»[199]. Тесная связь математики с физическими явлениями их удивляла. Она была, по их мнению, «*не более чем случайным контактом наук*». Они предполагали невозможность выяснения причин этого факта. Математические структуры будто бы развиваются не из реальных потребностей, а из внутренней дисциплинарной логики – все контакты между математикой и действительностью случайны. Развитие математического знания представляется ими в духе исключительного интернализма.

Советские математики под влиянием марксизма представляли развитие математики совершенно иначе – в духе экстернализма. «*Пространственные формы и количественные отношения действительного мира*» определяют не случайную, а объективную предопределённость связей математики и природы. Шилов заявлял о близости

---

[198] Шилов пишет: «*С этим пассажем Г. Кацивели нельзя согласиться. Идеологическая борьба нашего времени требует отнюдь не примирения враждующих идеологий, а, наоборот, разоблачения идеалистических течений и утверждения единственно правильной материалистической теории*» (с. 27). Эта имитация преданности марксистским установкам имела исключительно художественный смысл.

[199] Бурбаки Н. *«Архитектура математики»/ «Очерки по истории математики».* – М.: ИЛ, 1963, с. 251.

к марксистской позиции, но главной целью статьи он поставил развёрнутое изложение идей Бурбаки и соединение обоих мировоззрений.

Марксистские доводы в изложении Шилова зачастую простодушны: «*Разве можно сомневаться в том, что математика имеет дело с реальным миром? А радио и телевидение, а синхрофазотроны, а космические полёты – всё это связано с огромным фронтом чисто математических изысканий, при которых используется не только элементарная математика или классическое дифференциальное и интегральное исчисление, но и самые новейшие математические теории. Например, возьмём многомерные пространства – вы ведь не возражаете, что фазовые пространства в статистической механике – пространства с огромным числом измерений, что они отражают непосредственную материальную действительность, хотя бы для задач динамики газа в сосуде*»[200]. Эта декларация о значимости математики для техники и естествознания сразу же встречает отпор. Ведь полезна лишь незначительная часть математических достижений. И на каждый пример применения математики можно найти гораздо больше математических результатов, не имеющих отношения к действительности: «*Настоящая математика имеет своим предметом математические структуры сами по себе, без связи с нуждами действительного мира*»[201]. История математики будто бы не подтверждает определяющего воздействия на постановку математических проблем внешних факторов. Пусть в самом начале науки эта связь была. Из счёта возникла арифмети-

---

[200] Кацивели Г. (Шилов Г.Е.) «*Математика и действительность*»/ Историко-математические исследования, вып. 20. – М.: Наука, 1975, с. 14.
[201] Там же, с. 14.

ка, из измерения расстояний и площадей – геометрия. Но с самого появления этих дисциплин возникли проблемы, далёкие от действительного мира и нужд практики. В арифметике таковой была проблема распределения простых чисел. В геометрии давно известна несоизмеримость отрезков. Поэтому числа в геометрии были сначала вытеснены величинами и были возвращены туда лишь Декартом. Только с построением теории действительных чисел дискретность арифметики была согласована с непрерывностью геометрии. Но теория множеств создала много проблем. Гильберт на Всемирном конгрессе математиков 1900 г. отвёл гипотезе Кантора первое место. Антиномии Бурали-Форти и Рассела, споры об аксиоме Цермело привели к пересмотру логических основ математики. Дискуссии способствовали появлению логицизма, формализма, интуиционизма, конструктивизма, метаматематики. Сторонники Бурбаки в итоге заключают, что источник развития математики лежит не в материальном мире.

Новые математические структуры формируются из внутренней логики развития математического мышления. Шилов иллюстрировал эту мысль историей комплексного анализа. Так, Лейбниц считал комплексные числа *«уродами из мира идей»*, Эйлер отказывал им в существовании. Только с появлением планиметрической интерпретации мнимость комплексных чисел исчезла, ведь была осознана их связь с известными понятиями. Другим примером Шилов избрал теорию Галуа разрешимости алгебраических уравнений. Под её влиянием возникло много новых понятий, были решены важные алгебраические задачи. Но изучение алгебраических зависимостей в астрономии проводится приближёнными вычислительными приёмами.

Иногда математика применяется в физике. Но это происходит не из назревшей инженерной или физической необходимости, а случайно, в результате математических умозрений. Свой тезис Шилов подкрепляет историями открытий Лобачевского и Лебега.

Излагая принятую в советской науке экстерналистскую позицию, Шилов свёл популярность непрактических задач к психологии восприятия и коммуникации. Он писал, что у великих математиков арифметика не определяла творческие интересы. Например, Эйлер занимался математическим анализом, механикой, астрономией, артиллерий; Гаусс – теорией функций и дифференциальной геометрией, геодезией и астрономией. Чебышев создал теорию наилучших приближений и теорию механизмов. Адамар был одним из основателей функционального анализа и теории уравнений с частными производными. В новое время теория чисел отчасти сблизилась с остальной математикой, но осталась специфической, отдельной её частью.

Причину эффективности математики Шилов видел в подобии[202] математических структур структурам действительности. Люди выдвигают гипотезы, находя закономерности результатов одинаково повторённых действий. Гипотеза становится законом после проверки и с вытекающими следствиями образует модель некоторой части мира, отчасти подобную этой части.

---

[202] Шилов писал о *«гомоморфизме»* – т.е., о подобии формы или сообразности, отказываясь от ленинского понятия *«отражения»*, в математическом смысле предполагающего взаимную однозначность образа и прообраза.

При расширении сферы опыта учёные подбирают более подходящие структуры. «*Математические структуры обладают той особенностью, что, будучи раз сформулированными, они допускают чисто логическое развитие без дальнейшего обращения к действительному миру; и тут забывают, что используемая логика действительна лишь постольку, поскольку она оправдана повседневным опытом. Даже Кант считал натуральный ряд «априорным», «доопытным», и лишь в последнее время обратили внимание на то, что доказательство, например, равенства a+b=b+a для любых натуральных чисел a и b требует далёкой экстраполяции логики за её обеспеченные опытом границы. Поэтому и начался анализ основ логического вывода математических предложений*»[203]. Шилов заметил, что неверное мнение о развитии математических структур возникает при краткосрочном взгляде на такое развитие. Если же проследить всю историю конкретной структуры, то связь её с реальностью немедленно обнаружится. Шилов выделил три внешних импульса к развитию математики. Сначала потребности счёта и землепользования древних людей породили арифметику и геометрию. Длительная структуризация[204] этих наук привела к современной алгебре, топологии и геометрии. Второй импульс поступил в XVI–XVII вв., когда физико-механические задачи привели к созданию понятий производной и интеграла, к формированию дифференциального и интегрального исчислений. Их структуризация продолжается до настоящего времени. Создаются новые аксиоматические области – общая

---

[203] Кацивели Г. (Шилов Г.Е.) «*Математика и действительность*»/ Историко-математические исследования, вып. 20. – М.: Наука. 1975, с. 23.

[204] Прояснение логических связей и формирование структур.

теория дифференциальных операторов, теория дифференцируемых многообразий. В середине XX в. математика получила третий импульс. С развитием кибернетики и информатизации появились новые задачи, формирующие новые математические области. Структуризация их будет долгой, и в трактате Бурбаки они не представлены.

Шилов попытался улучшить определение математики от Бурбаки, введя в него связь с реальным миром: «*Чтобы определение математики по Бурбаки отвечало сути дела, ему необходимо было бы дать более расширенную форму, например, так: математика есть наука о математических структурах, рассматриваемых в их предыстории, т.е. накоплении и отборе фактов и связей явлений действительности, допускающих какого-либо типа формализации, в их истории – выработке абстрактных понятий, их анализе, расчленении логических связей, кристаллизации расчленённых связей в аксиомы; в окончательном аксиоматическом оформлении в развитии, и, наконец, в их выходе в другие области как самой математики, так и других наук. А при таком расширенном определении основной тезис Энгельса оказывается полностью включённым, так как пространственные формы и количественные отношения – простейшие характеристики действительного мира, допускающие формализацию*»[205].

Синтез локально справедливого определения математики Бурбаки и соответствующего историческим масштабам определения Энгельса, по Шилову, возможен и полезен, так как убирает жёсткий антагонизм

---

[205] Кацивели Г. (Шилов Г.Е.) *«Математика и действительность»*/ Историко-математические исследования, вып. 20. – М.: Наука. 1975, с. 25.

их естественного противоречия, приводящий к печальным последствиям.

М.М. Постников о том, является ли математика наукой. Известный советский геометр *Михаил Михайлович Постников* (1927–2004) был математическим вундеркиндом. После окончания восьмилетки в 1942 г. он поступил на математический факультет Пермского университета. Лекции по математическому анализу на факультете в то время читала эвакуированная из столицы С.А. Яновская. Она заметила талантливого студента и в 1943 г. помогла его переводу на второй курс мехмата МГУ. Постников окончил мехмат в 1945 г. По мехматской легенде, во время учёбы он сдал так много математических спецкурсов, что у него закончилось место в зачётке, и в неё пришлось вклеивать дополнительные листы. В 1945–1947 гг. Постников обучался в аспирантуре Отделения математики мехмата МГУ, а в 1947–1949 гг. – в аспирантуре Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Постников был учеником академика Льва Семёновича Понтрягина (1908–1988), под руководством которого в 1949 г. защитил кандидатскую диссертацию по алгебраической топологии *«Классификация отображений (n+1)–мерного полиэдра в n–связное топологическое пространство»*, усилив в ней результат учителя. С того времени он постоянно работал в Отделе геометрии и топологии Математического института, а позднее преподавал также и на мехмате МГУ. В 1949–51 гг. Постников открыл, что гомотопные типы клеточных пространств зависят не только от гомотопических групп, но и от дискретных наборов *«высших* *препятствий»*, называемых сейчас *«системами Постникова»*. Гомотопическую классификацию топологических пространств он свёл к чисто алгебраической проблеме. Его работы способствовали развитию теории гомотопий и были признаны международным математическим сообществом. В 1953 г. Постников защитил докторскую диссертацию *«Исследование по гомотопической теории непрерывных отображений»*. В 1957 г. его наградили премией Московского математического общества для молодых учёных. За цикл статей по теории гомотопий в 1961 г. Постникову присудили Ленинскую премию. В 1954–60 гг. он преподавал на кафедре Высшей алгебры МГУ, а в 1965 г. стал профессором кафедры Высшей геометрии и топологии МГУ. На мехмате Постников создал научно-исследовательский семинар по алгебраической топологии, активно работающий до сих пор. Постников написал 39 математических статей (последнюю из них – в 75-летнем возрасте), 17 математических книг и учебников, участвовал в переводе 10 зарубежных монографий и сборников работ по алгебраической топологии.

Научные интересы Постникова не ограничивались чистой математикой. В 1970-е гг. он увлёкся историологией Н.А. Морозова, и некоторое время пропагандировал её среди московских математиков[206]. Постников участвовал в работе семинара по философии математики и выступал на философских конференциях. О своём оригинальном понимании предмета математики

---

[206] Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б. *«Математики об истории. Вехи одного научного противостояния»*. – Ульяновск: Издатель Качалин А.В., 2014, с. 27–40.

и её специфики он доложил на Одесской конференции по философии математики в августе 1984 г. Стенограмму этой лекции напечатали в юбилейном выпуске журнала к 70-летию М.М. Постникова[207].

Суть математики, по Постникову, раскрывается в ответах на вопросы: относится ли математика к естествознанию, какие методы познания используют естественные науки и почему они эффективны, какими методами пользуется математика? Он рассуждал следующим образом[208]. В области естествознания физика является эталонной наукой. Физики исследуют природу посредством экспериментов и вычислений, предварительно моделируя изучаемые явления. Их наблюдения природы косвенны: *«Физик-экспериментатор, ставя эксперимент, смотрит на движение каких-то стрелок, изучает фотографии треков каких-то частиц, и тому подобное. Физик-теоретик что-то пишет на бумаге, делает какие-то вычисления, приходит к каким-то выводам о результатах тех или иных экспериментов… Прежде чем ставить эксперимент или производить какие-то вычисления, человек создаёт в уме модель тех явлений, которые он хочет изучить, исследовать»*[209]. В согласии с моделью создаются приборы, ставятся эксперименты, результаты сравниваются с ожиданиями. Физик-теоретик к *«запасу некоторых законов природы»* добав-

---

[207] Постников М.М. *«Является ли математика наукой»*// Математическое образование, 1997, №2, с. 83–88.

[208] Говоря о науке, Постников имел в виду естествознание, – то, что в английском языке именуется *science*. Это слово взято из латыни, где слово *scientia* произошло от *scio* – *«знать, испытывать, замечать, иметь опыт»*. Русскому слову *наука* соответствует греческое *διδαχη* – *«учение, наставление»*.

[209] Постников М.М. *«Является ли математика наукой»*// Математическое образование, 1997, №2, с. 83–84.

ляет новые законы, оценив степень совпадения выводов с результатами эксперимента. «*Основное в деятельности естествоиспытателей – это исследование не окружающего мира, а его моделей*»[210].

Почему же успешен метод познания мира при помощи моделей? Ответа Постников не ищет, декларируя факт действенности этого способа познания. Другим установленным фактом Постников считает наличие групп сходных моделей, эффективных в разных науках. Ему интересна причина такой схожести. Несмотря на разные попытки объяснения этого, убедительного для себя ответа Постников не нашёл. «*Схожесть моделей можно по-иному выразить, сказав, что модели каждого класса имеют общую схему, т.е. что схожие модели – это модели, которые основываются на одной и той же схеме… Математикой называется наука, изучающая все возможные – хотя бы мысленно – схемы, их взаимосвязи, методы их конструирования, иерархии схем (схемы схем) и т.д. и т.п.*»[211]

Итак, для Постникова математика – это наука не о моделях окружающего мира, а о схемах этих моделей. И поскольку естественные науки изучают модели, математика естественной наукой не является. От мысли, что математика – наука гуманитарная – Постникова отталкивает горделивая неприязнь «*к математике большей части гуманитариев*». Постников решает, что математика – наука особенная. Действительно, при изучении схем моделей и обобщении опыта их применения в математике создаются математические методы, выдаваемые деятелям естественных и инженерных наук.

---

[210] Там же, с. 84.
[211] Там же, с. 85.

В связи с многочисленностью и разнообразием схем моделей математики, для неё главное – «*помочь практике в создании моделей по ещё не получившим широкой известности схемам*». Отсюда вытекает специфика математической жизни – здесь изучают не только схемы моделей, но схемы схем и т.д., приобретая опыт их конструирования при решении чисто математических задач. Современная специализация ждёт от математиков либо приложения разработанных схем к практике, либо создания новых схем. И так возникает нечёткое разделение на *«прикладных»* и *«чистых»* математиков. Важной задачей математики станет осмысление «гуманитарных» моделей. Идеи такой математической теории созреют из конкретного анализа самих моделей.

* * *

Советские математики не хотели пренебрегать вполне успешным подходом Бурбаки к математике. Но безоговорочно согласиться с его философией было невозможно, хотя идеологическое давление уже не было столь тягостным, как прежде. Помимо этого, были понятны и некоторые преимущества марксистской, диалектической концепции математики в академической версии А.Н. Колмогорова и А.Д. Александрова. Поэтому широко мыслящие математики искали конвергентный вариант, хотя бы внешне примиряющий эти две концепции.

О ПРИЛОЖЕНИЯХ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПОЛЕЗНОСТИ

В 1970–80-е гг. проблема применимости математических методов обрела новое наполнение. Успехи в теоретической физике, механике, химии, распространение кибернетики, появление математических моделей в экономике, биологии, лингвистике подтверждали полезность прикладной математики. Универсальность математического способа научного исследования казалась несомненной. Мнение Нильса Бора о том, что математика – это язык науки, вдохновляла математиков на размышления о пределах математического знания.

Л.В. Канторович о математических методах планирования производства. Выдающийся советский математик и экономист *Леонид Витальевич Канторович* (1912–1986) поступил на математическое отделение физмата Ленинградского университета в возрасте 14 лет. На втором курсе он занимался в студенческом кружке профессора Г.М. Фихтенгольца. Туда же ходили впоследствии знаменитые математики – Д.К. Фаддеев, И.П. Натансон, С.Л. Соболев. Канторович посещал и семинар по дескриптивной теории функций. Его первые научные труды были по этой теме. К окончанию университета в 1930 г. Канторович уже был автором 11 математических публикаций, и его оставили в аспирантуре для научной работы.

В июне 1930 г. Канторович участвовал в Первом Всесоюзном съезде математиков в Харькове. Его затронули выступления О.Ю. Шмидта (*«Роль математики в строительстве социализма»*) и С.Н. Бернштейна

(*«Современное состояние и проблемы теории приближения функций действительного переменного посредством полиномов»*).

В это время Канторович также преподавал в Институте инженеров промышленного строительства[212]. После постановления Совнаркома СССР о введении учёных степеней и званий, институт представил его к званию профессора, а Ленинградский университет – к учёной степени доктора физ.-мат. наук. С 1934 по 1960 гг. Канторович был профессором кафедры математического анализа Ленинградского университета. Затем он перевёлся в Новосибирский университет.

В 1930-е гг. Канторович продолжал заниматься конструктивной теорией функций и достиг значительных результатов. Один из определённых им объектов был назван *«пространством Канторовича»*. На первом Всесоюзном конкурсе работ молодых учёных Канторович получил первую премию.

В конце 1930-х гг. интересы Канторовича сместились в прикладную область. В 1938 г. сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста попросили математиков рекомендовать численный метод расчёта выпускаемой ими продукции. Изучив проблему, Канторович создал теорию линейного программирования. Оптимизация линейной функции с десятками переменных и большим количеством линейных ограничений нуждалась в принципиально новом подходе. Канторович выяснил связь оптимального пла-

---

[212] Канторович Л.В. *«Мой путь в науке»*// Успехи математических наук, 1987, т. 42, №2 (254), с. 183–213. Это посмертная публикация предполагаемого доклада в Московском математическом обществе.

нирования со стоимостными показателями. Он нашёл признаки оптимальности и предложил разные схемы перебора допустимых планов и показателей. В 1939 г. Канторович издал брошюру *«Математические методы организации и планирования промышленного производства»*, где исследовал планово-производственные задачи. Он предложил новые методы решения теоретических и практических задач экономики о равновесии, динамике и эффективности. Через 36 лет Канторович получил Нобелевскую премию по экономике за эти открытия.

С началом войны Канторовичу дали звание майора. В Ярославле он занимался прикладными военными исследованиями, написал учебник по теории вероятности для военных инженеров. С 1948 г. он заведовал Вычислительным отделом Ленинградского отделения математического института, отвечая за расчёты для советского атомного проекта. Канторович вышел в запас в звании инженера–подполковника.

Дальнейшая научная карьера Канторовича казалось удачной. В 1949 г. он стал лауреатом Государственной (Сталинской) премии СССР, в 1958 г. – членом-корреспондентом АН СССР, в 1964 г. – академиком, в 1965 г. получил Ленинскую премию. И, наконец, в 1975 г. Канторович стал Нобелевским лауреатом по экономике. Но за внешним благополучием таились беспрестанные конфликты с партийными волюнтаристами. Канторович полагал, что методы линейного программирования должны быть востребованы плановым социалистическим хозяйством. Об этом гласит название его брошюры 1939 г. Разработки Канторовича были отчасти внедрены на вагоностроительном заводе им. Егорова и в московском таксопарке. Но его теория сталкивалась со значительными препятствиями. Её признали в Советском Союзе только после применения аналогичных результатов западными капиталистическими предприятиями. Ещё в 1942 г. Канторович закончил книгу *«Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов»*, опубликованную в 1959 г. и навлекшую резкую критику.

Открытиям Канторовича мешали не только объективные сложности метода, неприспособленного к ручному расчёту и требовавшего развития вычислительной техники, но и косность большинства советских экономистов, привыкших управлять народным хозяйством при помощи идеологических речёвок[213]. В новой и сложной теории дремучие догматики увидели угрозу своему бесплодному благоденствию.

Так, сообщают, что после внедрения оптимального способа нарезки труб на вагоностроительном заводе, сократившего отходы производства, министерство лишило рабочих премии за *«невыполнение плана сдачи металлолома»*. В другой раз министерские экономисты, ошибочно экстраполировав достигнутые успехи, обязали завод увеличить годовой план настолько, что выход готовой продукции должен был превзойти количество затраченного материала. И только прямое вмешательство Академии наук СССР отменило эту дирек-

---

[213] Напомним лозунги периода развитого социализма: *«Добьёмся максимума производства при минимуме затрат»*, *«Экономика должна быть экономной»*. Несколько ранее в советских экономических кругах бытовало изречение: *«Математическая экономика – такая же нелепица как математическая физика»*.

тиву. Отметим, что внедрение нового метода при разрезке труб давало лишь 4–5% преимущество перед обычными эмпирическими прикидками. Но уже в *«задаче фанерного треста»* о раскрое материала экономия составляла более 20%. В масштабах страны это могло бы давать большую прибыль, но методы не внедрялись из невежества и боязни ответственности.

Изобретённую математическую экономику Канторович считал главным делом своей жизни и не жалел сил на её продвижение. Он смело посылал письма ведущим экономистам Госплана, и даже Сталину, доказывая пользу своего метода для социалистического хозяйства. В 1960 г. с разоблачением идей Канторовича совместно выступили главный редактор *«Вопросов экономики»*, только что избранный член-корреспондент АН СССР Гатовский и заведующий экономическим отделом редколлегии *«Коммуниста»* Саков[214]. Ответ Канторовича в журнал редакция утаила. Его поддержали математики из Академии наук – С.Л. Соболев, А.Д. Александров, И.Г. Петровский и др., но их защита запоздала и не имела идеологического веса. Партийные экономисты уже подстраховались доносом в ЦК, в котором обвинили Канторовича в мании величия и пропаганде лженаучных идей *«итальянского фашиста Парето, любимца Б. Муссолини»*. Канторовича, работавшего в Сибирском Отделении АН СССР, арестовали и заперли в психиатрическую больницу. По счастью, «лечили» его недолго – помощь столичных друзей, коллег и родственников, а также растущее мировое признание со-

[214] Гатовский Л.М., Саков М.П. *«О принципиальной основе экономических исследований»* // Коммунист, 1960, №15, с. 80–81.

хранили умственное здоровье и жизнь Канторовича. По освобождению Канторовича безрезультатно выдвигали на Ленинскую Премию в 1962 и 1964 гг.

Вскоре после падения Хрущёва и его экономических советников Канторович был избран действительным академиком. В 1965 г. его вместе с двумя экономистами, – В.С. Немчиновым и В.В. Новожиловым, – наградили Ленинской премией *«за научную разработку метода линейного программирования и математических моделей экономики»*. В 1975 г. Канторович получил Нобелевскую премию по экономике *«за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике»*, поделив её с американцем Т.Ч. Купмансом[215]. В том же году Нобелевскую премию мира дали правозащитнику А.Д. Сахарову, с которым Канторович поддерживал хорошие отношения.

Из послевоенных научных занятий Канторовича отметим его участие в создании советской вычислительной техники, в разработке новых методов приближённых вычислений. Известно рационализаторское предложение Канторовича 1960-х годов, научно обоснованное в *«Успехах Математических Наук»*. Он рассчитал тарифы на такси, предложив ввести плату за посадку и уменьшить плату за проезд, что должно было привести к рентабельности коротких поездок.

Канторович написал более 200 научных работ и полтора десятка книг. Государство наградило его двумя орденами Ленина (1965, 1982), тремя орденами

---

[215] При выдаче Нобелевских наград шведский король перепутал именные золотые медали Канторовича и Купманса. Ошибку обнаружил Канторович в 1977. Её исправили в 1978.

Трудового Красного Знамени (1949, 1953, 1975), орденом *«Знак Почёта»* (1944), орденом Отечественной войны 1-й степени (1985), многими медалями и премиями. Незадолго до кончины Канторовичу дали Большую серебряную медаль Бирмингемского Общества исследования операций за *«роль первопроходца в развитии линейного программирования»*. Он был почётным доктором университетов Галле, Глазго, Гренобля, Кембриджа, Мюнхена, Ниццы, Парижа, Пенсильвании, Хельсинки, Варшавской высшей школы планирования и статистики, Ирландского международного института управления. Его выбрали почётным академиком Венгрии, ГДР, Югославии, Американской академии наук и искусств, Национальной инженерной академии Мексики. Он был учредителем Международного эконометрического общества (США), его почётным членом (1973) и членом правления (1976).

Леонид Витальевич Канторович умер в Москве в 1986 г. При жизни он был легендарным математиком. Посмертно его биография обросла фантастическими выдумками[216].

---

[216] Характерны записки главного редактора *«Нового Мира»*, академика РАН по гуманитарным и общественным наукам: *«Академик Канторович был первым экономистом-рыночником, которого я видел живьём. Однажды я забрёл к нему в коттедж, мы сели попить чайку под огромным многолистным и ярко-зеленым фикусом, и за полчаса он объяснил мне, почему и чем порочна система государственной монополии и государственного планирования. Я ошалел. Я ошалел ещё больше, когда он сказал мне, что он не может и не должен жить в стране, в которой он никому-никому не нужен, никем не понимаем, а в силу этого даже и презираем, и что при первой же возможности он покинет Советский Союз, поселится в Америке, по модели которой он разрабатывает систему математической экономики. Так и получилось: года через два Канторович эмигрировал в Америку, а это по тем временам был случай совершенно*

Отдельных работ по философии математики Канторович не оставил, но в некоторых интервью отчасти изложил своё понимание этого предмета. Главным мотивом его выступлений были перспективы математических приложений. В естественных науках и технике математические модели применялись давно – с их помощью производят любые расчёты. Но в экономике внедрение математики проблематичнее. Канторович рассказывал, как тяжело проходили его предложения из-за косности и идеологического сопротивления. Экономические реформы затрагивают многие интересы, для них требуется фундаментальная перестройка хозяйственных процессов. Переломным стало Всесоюзное совещание по применению математических методов в экономике и планировании 1960 г. Его противники заявляли, что формулы вытеснят *«экономическую материю»*. В ответ А.А. Марков напомнил, что математика успешно применяется в механике и физике, но материя в них не исчезла. Поэтому нет оснований думать, что применение математических методов в экономике её погубит.

Канторович рассуждал о важности математических методов для экономической науки и практики. Математическая экономика изучает процессы общественного производства всего необходимого человеку. Без неё не понять механизм потребления с его мотивацией и спросом на разные товары и услуги. Не по-

---

исключительный, ещё год-другой спустя он стал лауреатом Нобелевской премии. Разговор наш в тот день я чуть ли не дословно помню и сейчас, но я всё равно оставался при своём принципе: всем надо работать хорошо, а тогда всё будет хорошо». (Залыгин С.П. *«Моя демократия. Заметки по ходу жизни»*// Новый мир, 1996, №12, с. 149) нять и возможности удовлетворения спроса, его динамику изменения, а также систему распределения материальных благ. Экономическая наука ближе всего к повседневной жизни человека. Она связана с множеством факторов, определяющих поведение людей и коллективов. Поэтому построение математических моделей в этой области – чрезвычайно сложное дело.

Канторович оптимистично ждал развития вычислительной техники и её более содержательного применения в математике[217]. Прогресс в области производства быстродействующих счётных машин позволяет надеяться на улучшение их технических характеристик и широкое внедрение. Для повышения эффективности использования вычислительных машин необходимо совершенствование методов программирования. Применение вычислительных машин в математике возможно не только для числовых, но и для аналитических выкладок. Канторович указал наиболее очевидные области приложения вычислительной техники в математике. Прежде всего, усилятся возможности оперирования математическими таблицами и иными способами работы с функциями. Для этого можно создать более полные и точные таблицы специальных функций. Будет доступно вычисление полиномов наилучшего приближения на заданных интервалах, нахождение аппроксимаций функций на основе численной реализации их интегрального представления, разложение в непрерывную дробь и т.п. С помощью элек-

---

[217] Канторович Л.В. *«Перспективы развития и использования электронных счётных машин»*/ *«Математика, её содержание, методы и значение. Т. 1»*. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 382–390.

тронных машин быстрее и проще находить решения уравнений численными методами без использования аналитического представления. Поэтому не потребуется значительных усилий для решения частных задач техники и механики. Численные методы будут оцениваться по возможности их реализации на вычислительных машинах и по универсальности, т.е. по широте их применения. Распространение получат универсальные способы, применимые к большому кругу проблем: разностные, вариационные, метод градиента, итеративные и т.д.

Вместе с тем появятся и новые возможности теоретического анализа задачи. Так, по приближённому решению методами функционального анализа можно исследовать существование и единственность точного решения, установить область его определения. Чисто теоретические методы такого исследования трудны и отнимают много времени. Поэтому использование для этой цели численных машинных расчетов представляет большой интерес. Увеличение вычислительных возможностей электронных машин и накопление практики их использования создали новую проблематику численных методов. Так, вместо отдельного решения системы линейных уравнений с большим числом неизвестных теперь возможно массово изучать подобные задачи. Актуальна задача выяснения влияния на точность определения неизвестных округлений не только в начальных коэффициентах, но и в процессе решения системы уравнений. Важен вопрос о сходимости к решению численного интегрирования дифференциальных уравнений. В результате исследований произошла переоценка методов численного интегрирования. Использование вычислительных машин сделает осуществимыми методы, ранее казавшиеся нереально трудоёмкими, – например, – способ случайных проб. Станет возможно применять вычислительные машины при техническом проектировании – при выборе варианта конструктивного решения или размещения каких-либо объектов. В вопросах организации производства при выборе наилучшего производительного или экономного варианта машины также найдут применение. Будет доступен систематический пересмотр вариантов с подсчётом заданных характеристик. «*Вопросы конструкции и анализа работы вычислительных машин и возможностей их применения представляют обширное поле деятельности для математики. Использование математических машин в ближайшие годы несомненно сыграет большую роль в росте советской техники и культуры*»[218].

Канторович, видимо, принимал технократическую задачу кибернетики, поставленную Н. Винером, и верил в возможность эффективного управления обществом. Для достижения этой цели необходимо использование в планировании передовых математических методов и автоматизация систем управления. Он приложил огромные усилия, чтобы передать свои идеи планово-экономическим органам. Но Канторович также понимал, что совершенствование экономики, полезное для социалистического общества в целом и надолго, угрожает многим частным временным интересам. И, в

---

[218] Канторович Л.В. *«Перспективы развития и использования электронных счётных машин»*/ *«Математика, её содержание, методы и значение. Т. 1»*. – М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 390.

конечном счёте, корыстные управленцы, найдя для себя рыночную стихию более привлекательной, погасили советский кибернетический проект.

Н.Н. Моисеев о единстве абстрактной и прикладной математики. Знаменитый советский математик *Никита Николаевич Моисеев* (1917–2000) в 1941 г. окончил мехмат МГУ. С началом Великой Отечественной войны он был послан на учёбу в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского. С 1942 г. он служил на Волховском фронте старшим авиатехником, прошёл до конца войны и был демобилизован в 1948 г. До 1950 г. Моисеев преподавал в МВТУ на факультете авиационного вооружения и работал в НИИ-2 Министерства авиационной промышленности СССР, обрабатывая результаты испытаний реактивных снарядов. На этих исследованиях он защитил диссертацию к.т.н. В 1950 г. он уехал в Ростов-на-Дону и преподавал теоретическую механику в Ростовском университете, занимаясь также гидродинамикой. В середине 1950-х гг. Моисеев стал заведовать отделом вычислительных методов в гидродинамике московского Вычислительного Центра АН СССР. Одновременно он работал в МФТИ. В 1955 г. он стал деканом Аэромеханического факультета, а позже возглавил факультет управления и прикладной математики. В 1958–86 гг. Моисеев был заместителем директора ВЦ АН СССР. Он создавал вычислительные методы решения аэрокосмических задач и работал с институтами, создававшими авиационную и ракетную технику.

В 1965 г. вышла его совместная с В.В. Румянцевым книга *«Динамика тела с полостями, содержащи-*

ми жидкость». За создание теории движения тела с жидкостью, – в частности, ракет на жидком топливе, – он получил Государственную премию. За создание устойчивых асимптотических методов расчёта траекторий космических аппаратов Моисеева избрали в Международную академию астронавтики. Основу докторской диссертации Моисеева составило обобщение теоремы Жуковского на твёрдое тело с жидкостью. В 1966 г. он стал членом-корреспондентом АН СССР по отделению механики и процессов управления.

Моисеев занимался применением ЭВМ к автоматизированному проектированию самолётов для КБ П.О. Сухого. Он участвовал в создании одной из первых САПР, обеспечивавших многовариантное проектирование конструкций летательных аппаратов, экспертную оценку вариантов и их выбор.

В 1964–1966 гг. Моисеев занимался динамическим программированием в теории оптимального управления и применениями этой теории к задачам планирования. Он организовывал Всесоюзные математические школы по теории оптимального управления.

В 1970-е гг. Моисеев разрабатывал модели биосферы. Интерес к проблеме выживания человечества возник у него под влиянием биолога Н.В. Тимофеева-Ресовского. Моисеев выступил на первой конференции ЮНЕСКО по глобальным проблемам 1971 г., и предложил создать компьютерную имитацию взаимодействия океана, атмосферы и биосферы, задавая в эту модель разные сценарии деятельности человека. При поддержке вице-президента АН СССР А.В. Сидоренко он организовал в ВЦ АН СССР лаборатории моделирования процессов биотической природы и моделирования взаимодействия системы океан – атмосфера. Первый вариант моделей был создан в конце 1970-х гг., были получены первые результаты расчётов изменений продуктивности планетарной биоты при удвоении концентрации углекислоты в атмосфере. В начале 1980-х гг. подтвердилась расчётами гипотеза *«ядерной зимы»*. Оценки эффектов «ядерной зимы» были опубликованы в книге Н.Н. Моисеева, В.В. Александрова и А.М. Тарко *«Человек и биосфера»* в 1985 г.

В 1984 г. Моисеев стал академиком АН СССР по Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации. С 1980-х гг. он пропагандировал идею экологической безопасности ради выживания человечества и перехода к коэволюции.

Моисеев был прикладником и теоретиком одновременно и считал, что в современных условиях деление на прикладную и абстрактную математику непродуктивно. «*Математик становится так же, как и инженер, необходимым участником производственного процесса. Если пятьдесят лет тому назад математиками становились единицы, то теперь стране требуются многие тысячи математиков-профессионалов (и не только программистов). Новые потребности общества рождают новые задачи и ставят перед математикой новые проблемы… а ещё 50 лет тому назад математика считалась «чистой наукой»*»[219].

Математика возникла из повседневных практических потребностей на ранних этапах развития человечества. Но возникнув однажды, абстрактные идеи на-

---

[219] Моисеев Н.Н. *«Математика ставит эксперимент»*. – М.: Наука, 1979, с. 11.

чинают жить по-своему. Формируется внутренняя логика развития абстракций, мало связанная с реальностью и практическими запросами. Отвлечённость математических теорий не должна вводить в заблуждение о том, что есть некий особый мир, им соответствующий. Математические теории возникли естественным образом в процессе изучения окружающего мира и являются составной частью его понимания. Существенные прорывы в технике и физике стимулируют развитие математики: «*Возникали новые концепции, новая теория. Она начинала жить самостоятельной жизнью, казалось бы, оторванной от исходной посылки, а затем возвращала сторицей от исходной посылки то, что она использовала для своего развития, то, что послужило ей отправным пунктом. Новые факты, открытые учёными, технические конструкции, созданные инженерами, рождают новые математические задачи. На их основе возникают теории, которые на каком-то этапе, в какой-то момент помогут учёным открыть новые явления*»[220].

Моисеев в материалистическом духе заявляет, что в основе любого творчества лежит практическое начало, и абстрактное математическое знание всегда отражает некую реальность. Исследователь может не понимать перспективы своей работы. Так, Софус Ли своей теорией предполагал лишь развить идеи Галуа и не знал, что позднее появится теория инвариантно-групповых решений уравнений гидро- и газодинамики, из которой следуют выводы теории автомодельных решений. Так абстрактные алгебраические исследования усовершенствовали методы механики сплошных сред.

---

[220] *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979, с.14.

Есть логика развития математических идей, но на развитии отдельных областей математики сказываются разные факторы. Авторитетные учёные своим примером и работами могут направлять или уводить в сторону тех, кто оказался под их влиянием. Моисеев напомнил пример конца 1930-х гг. в теории турбулентности. Тогда Колмогоров дал интересную схему статистического описания турбулентности. Многие исследователи стали развивать его идеи, и только через 40 лет стало ясно, что в описании турбулентных движений должны лежать законы сохранения, а статистика следует из них. Математические результаты полезны либо в прикладном знании, либо для внутренней эволюции. Нельзя намеренно суживать рамки исследований, ведь математика постоянно расширяется, и нет чёткой демаркации её с другими науками. В единстве математики – залог её дальнейшего развития.

Моисеев пишет об изменении образа математики с 1950-х гг. Приложения математики распространились в экономику, биологию и историю. Увеличились возможности вычислительной техники. Возникли новые разделы математики. Некоторые беспокоились о размытии предмета математики. Охранители чистоты математики пренебрегают её прикладными возможностями. Они полагают, что математика должна существовать ради её самой. Её единственная ценность – элегантность логических построений. К пуристам часто причисляют Бурбаки. Но это верно лишь отчасти. Их полностью оправдывает грандиозный и талантливый проект *«перестройки центра города, имя которому математика»*. Учёный вправе выбирать область исследования, обильнее реализующую его талант. По мнению Моисеева, упоение *«чистыми»* математическими проблемами прошло в середине XX века. По его наблюдениям, на Международных математических конгрессах в традиционных секциях (таких как теория чисел, алгебра или теория функций) обычно выступают именитые, зрелые учёные. А в новых секциях (посвящённых статистике, вычислительной математике или теории управления) чаще выступает молодёжь.

Моисеев рисует экспансию математических методов в гуманитарные, социально-экономические и естественные науки. По мере развития математики и роста содержательного знания в разных дисциплинах возможности методов формализованного анализа возрастают. Есть объективная трудность использования математики и формализованных подходов, связанная с массой неопределённостей разного рода в гуманитарных и социальных науках. Но и там возможно эффективное применение математических методов. Нет дисциплин, принципиально чуждых математике. Переменна лишь возможная глубина их математизации на каждом этапе развития.

Моисеев объявляет математику особой культурой мышления: «*Многие действительно думают, что математика – это наука, оперирующая числами, и только. Очень немногие понимают, что математика – это также и ЯЗЫК формального описания, это принципы и методы исследования, использующие возможности формально логических построений, а числа – чисто количественные категории – лишь одна из многих областей, где математика проявляет своё могущество. Математика как особая культура мышления, как естественная составляющая* *общенаучной культуры, необходима любым наукам,…»*[221]. Ему очевидна бесспорная польза математического знания, повышающего познавательный потенциал иных дисциплин, объединяющего гуманитарное и естественнонаучное мышление и являющегося средством выживания человечества.

* * *

Определение образа математики часто связывается с её предназначением: «Должна ли математика быть полезной и зачем ею занимаются?».

И.Р. Шафаревич о красоте математики. Замечательный современный математик, общественный деятель и публицист *Игорь Ростиславович Шафаревич* (р. в 1923 г.) – автор всемирно признанных научных результатов. Его математическое влияние обусловлено открытиями в алгебре, теории чисел и алгебраической геометрии, а также лекциями, семинарами и книгами.

Научная биография Шафаревича служит счастливым примером воплощения ранней математической одарённости. Исключительные способности позволили ему окончить мехмат МГУ в возрасте 17-и лет. В 1942 г. Шафаревич защитил кандидатскую диссертацию *«О нормированности топологических полей»*, а в 1946 г. – докторскую диссертацию *«Исследования по теории конечных расширений»*[222]. Его главные научные интересы лежат в области алгебры, а точнее – алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел. Из несом-

---

[221] Моисеев Н.Н. *«Математика ставит эксперимент»*. – М.: Наука, 1979, с. 144.

[222] Шафаревич И.Р. *«Исследования по теории конечных расширений (аннотация докторской диссертации)»*// Успехи математических наук, 1947, т. 2, №2(18), с. 223–226.

ненных достижений Шафаревича упомянем решение им обратной задачи теории Галуа для расширений локальных полей, полей алгебраических чисел и разрешимых групп Галуа, решение проблемы Гильберта об общем законе взаимности. Доказанный им закон взаимности степенных вычетов завершил более чем 150-летнюю тему, начатую Эйлером, Лежандром и Гауссом. Нечасто вспоминают важное неклассическое открытие Шафаревича. Вместе с учеником он создал когомологический метод исследования градуированных алгебр и построил конечнопорождённую, но бесконечномерную нильалгебру[223].

Работа Шафаревича высоко ценилась научным сообществом. В возрасте 35 лет его избрали членом-корреспондентом Академии наук СССР. В 1959 г. Шафаревича наградили Ленинской премией. В 1970–73 гг. он возглавлял Московское математическое общество. До 1975 г. Шафаревич преподавал на мехмате МГУ, а с 1943 г. постоянно работает в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР. Его учебники алгебры, алгебраической геометрии и теории чисел вошли во всемирный фонд математических достижений. Высокая результативность его научной работы сохранялись на протяжении 1950–90-х гг.[224]

Гражданская позиция Шафаревича определилась в 1960-е гг. Тогда он вовлёкся в несанкционированную государством общественную деятельность и вошёл в правозащитный комитет, возглавляемый академи-

---

[223] Голод Е.С., Шафаревич И.Р. *«О башне полей классов»*// Известия АН СССР. Серия матем., 1964, т. 28, в. 2, с. 261–272.
[224] Обзор трудов И.Р. Шафаревича опубликован в Успехах математических наук, 1984, т. 39, №1, с. 167–174.

ком А.Д. Сахаровым. Шафаревич стал активным диссидентом. Он готовил обращения о недопустимости карательной психиатрии в политических целях, написал доклад о советских законах, подавляющих религию. В 1968 г. Шафаревич познакомился с писателем Солженицыным, и через два года они начали самиздатский проект *«Из-под глыб»*. В сборнике 1974 г. три статьи принадлежали Шафаревичу: *«Социализм»*, *«Обособление или сближение?»* и *«Есть ли у России будущее?»*. В 1975 г. он был демонстративно уволен из Московского университета «за антисоветскую деятельность», но сохранил позицию в МИАН – научный семинар И.Р. Шафаревича продолжал свою работу.

В 1977 г. Шафаревич опубликовал в Париже книгу *«Социализм как явление мировой истории»*, развивая идеи своих самиздатовских статей. Он доказывал, что социализм оказался не передовым общественным устройством, а наоборот – непроизводительным атавизмом, губительным для русской культуры. Прообраз СССР Шафаревич увидел в тоталитарных государствах прошлого – Древнем Египте, Месопотамии, иезуитских редукциях Парагвая. В 1980-х гг. «компетентные» органы стали планировать его арест и высылку.

Участвуя в правозащитном движении, Игорь Ростиславович постепенно разочаровался в его маршруте. Управляемое из-за океана инакомыслие переставало служить демократическим реформам СССР, превращаясь в публичные политические акции для рекламирования участников и их последующего выезда на Запад. Шафаревич не соглашался с идеей Сахарова, что свобода эмиграции является главным гражданским правом. Право достойной жизни на Родине он считал более важным. Свободу совести он почитал высшей из свобод. К тому времени кажущееся безразличие народа к законам, его инертность и зависимость от партийной пропаганды привели многих диссидентов к мысли о тщетности их усилий. Радикалы движения эпатировали общество мизантропическими суждениями о русском характере. Принципиальное несогласие с их историософскими вымыслами Шафаревич заявил в *«Русофобии»* 1982 г.[225]

С 1980-х гг. он стал самым знаменитым представителем консервативной части патриотического движения. У Шафаревича особая позиция в отношении науки. Он отвергает сциентизм как идеологию научного сообщества и всей технической цивилизации. Его заботят последствия интенсивного развития западного общества, в первую очередь – экологический кризис, угрожающий природе. По его мнению, современный человек в повседневном существовании всё более погружён в искусственный мир техники и мало общается с живым. Это приводит к дегуманизации жизни и оценке всего с точки зрения недальновидной целесообразности. Техническая цивилизация всеми своими

---

[225] Своё сочинение Шафаревич назвал *«работой»*, не относя к конкретному жанру. Он изучил тенденцию порочить историю и будущее России. Рассадником этого направления он назвал некий *«малый народ»*, поселившийся в теле *«большого народа»*, живущий за счёт последнего, желая тому несчастий. После публикации на автора накинулись многие обиженные его словами преуспевающие деятели науки. В давно признанных математических трудах Шафаревича они искали изъяны, муссируя слухи об их наличии. Американские активисты требовали исключить Шафаревича из Национальной академии США.

успехами обязана естествознанию. Шафаревич считает, что развитие науки замедляется: «*Если в первой половине XX в. возникли такие радикально меняющие картину мира области как теория относительности, квантовая механика и генетика, то во второй половине века мы ничего подобного не встречаем. Когда говорят о последних успехах человечества, обычно упоминают спутники или компьютеры. Но это не относится к естествознанию, не есть открытие новых законов природы!*»[226]. Упования на науку основаны на вере в существование небольшого числа точно формулируемых законов природы. Открытие их позволяет предсказывать природные феномены и управлять ими. Вселенная с XVII в. представлялась гигантским механизмом, который можно контролировать, если известны принципы его функционирования. Шафаревич напоминает идею Э. Маха о том, что научная идеология играет роль религии технологической цивилизации.

Сциентизм предполагает возможность математизации Природы: всё существенное может быть отражено в числах или других математических объектах. Затем посредством математических операций можно подчинить человеческой воле все явления природы и общества. Многие философы и учёные считали математику высшей из наук, а математизацию – совершенной фазой развития научной концепции. В сциентизме математизация стандартизирует и нивелирует индивидуальность. Она сводит глубокие проблемы к упрощённым логическим схемам. Отрицая естествен-

---

[226] Шафаревич И.Р. *«Из истории естественно-научного мировоззрения»*/ Историко-математические исследования. Вторая серия, вып. 6 (41). – М.: Янус-К, 2001. с. 11–33.

нонаучный идеал полезности, Шафаревич признаёт лишь эстетический критерий оценки научного труда. Математика, по его мнению, даёт пример эталона красоты. Ведь математическая работа до конца не формализуема, не сводима к алгоритму – интуиция в ней имеет огромное значение. Творческий математик никогда не будет заменён компьютером. Но при этом математика, воплощая дух науки, доступна только тем, кто способен к последовательному логическому, машинообразному рассуждению. Поэтому в математике невозможно существенное открытие, если у математика нет особого эстетического чувства, дающего верное направление его мысли, отсекающего лишнее и безобразное. Учёный свободен выбирать, в каком направлении развития человечества ему участвовать. Либо обслуживать нужды технологической цивилизации, ведущей к потере духовности и к роботизации человека, либо обрести высшую цель, и, тем самым, – смысл своей деятельности. Образцы такой цели Шафаревич находит у пифагорейцев, создавших математику[227].

В.И. Арнольд – «Математика это физика!». Российский математик *Владимир Игоревич Арнольд* (1937–2010) окончил мехмат МГУ в 1959 г. Под руководством академика А.Н. Колмогорова в 1957 г. он решил тринадцатую проблему Гильберта в общей постановке. По этой теме он защитил кандидатскую диссертацию (*«О представлении непрерывных функций*

[227] Шафаревич И.Р. *«О некоторых тенденциях развития математики»*/ *«Есть ли у России будущее?»* – М.: Советский писатель, 1991, с. 549–554.

трёх переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных», 1961). Совет хотел засчитать его результат за докторский, но Арнольд отказался и вскоре защитил докторскую диссертацию на иную тему (*«Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике»*, 1963). Он работал на мехмате МГУ (1961–1986), в МИАН (1986–2010), в Парижском университете 9-Дофин (1993–2010). Кратковременно он работал в Тринити-Колледже Кембриджского университета.

Научные заслуги Арнольда были признаны математическим сообществом. Он был заместителем главного редактора журнала, созданного И.М. Гельфандом, – *«Функциональный анализ и его приложения»*. В 1986 г. Арнольда избрали членкором АН СССР, а в 1990 г. – действительным академиком. Арнольд состоял во многих научных обществах и имел международные математические награды. Он был почётным членом Лондонского математического общества (1976), почётным доктором Парижского университета имени супругов Кюри (1979), иностранным членом Национальной АН США (1983), Французской АН (1983), АН ГДР (1987), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1987), Лондонского Королевского Общества (1988), римской Академии Рысьеглазих (1988), Американского Философского Общества (1989), почётным доктором Болонского университета (1991). А также был лауреатом премии ММО (1958), Ленинской премии (с Колмогоровым, 1965), Крафордской премии шведской Королевской АН (1982), премии Лобачевского (1992), премии Харви хайфского Технийона (1994), премии Вольфа (2001), премии Хайнемана Американского института физики (2001), Госпремии России (2007), премии Шао Ифу (2008). Арнольд был членом Исполкома Международного математического союза и президентом Московского математического общества (1996–2010).

Арнольд много писал об истории и преподавании математики. Но у него нет отдельного сочинения, где бы он излагал своё видение философии математики. Зато он оставил много афоризмов на эту тему, рассыпанных по многочисленным выступлениям. По ним отчасти можно догадаться о философских представлениях Арнольда.

В мировоззрении Арнольда лежало убеждение о подчинённости математики естествознанию и значимости её лишь своими приложениями. Он повторял за Л. Пастером, что нет фундаментальных и прикладных наук, но есть науки, добывающие знание и есть приложения этих наук. Арнольда возмущал сложившийся принцип финансирования, когда прикладные исследования получают значительную часть выделяемых науке средств. Ещё большее негодование вызывали у него огромные военные расходы. Арнольд неоднократно повторял, что годовые траты Академии наук не превосходят стоимости одного танка. Он отмечал невозможность скорого определения степени полезности теоретических открытий. Так, никто не мог ожидать, что эксперименты с янтарём и шерстью дадут практические результаты, как это случилось после создания теории электромагнетизма. Но отчасти само математическое сообщество виновно в игнорировании своей работы народом и властью. Чересчур формализованное математическое преподавание не позволяет освоить логику доказательств большинству обучающихся.

Следующий поразительный вывод Арнольда касался места математики в системе наук. Многолетние исследования по математической физике укрепили его веру в естественнонаучный характер математики. Ещё большее влияние оказало на него непосредственное участие в создании теории катастроф. Из этого возник его шуточный лозунг: *«Математика – это физика!»*.

Пусть математика кажется набором ремёсел, на самом же деле она представляет собой искусство описания мира: «*Математическое описание мира основано на деликатном взаимодействии непрерывных (плавных) и дискретных (скачкообразных) явлений… В современной математике создана огромная теория особенностей, являющаяся обобщением критических точек функций на случай, когда рассматривается сразу несколько функций от сразу нескольких аргументов*»[228]. Математическая основа феноменологической теории катастроф, – теория особенностей гладких отображений, – соединяет самые абстрактные части алгебры, геометрии и теории функций с такими прикладными областями, как оптимальное управление, асимптотические методы, классическая и квантовая механика. Арнольд демонстрирует роль критических значений отображений в разных приложениях математики.

Схема построения математической теории, по Арнольду, подобна естественным наукам[229]. Сначала на-

---

[228] Арнольд В.И. *«Математика и физика: родитель и дитя или сёстры?»*// Успехи физических наук, 1999, т. 169, №12, с. 1311–1312.

[229] Арнольд В.И. *«О преподавании математики»*// Успехи математических наук, 1998, т. 53, №1(319), с. 229–234.

блюдаются какие-то частные явления. Затем нащупываются пределы применимости наблюдений, ищутся контрпримеры, предохраняющие от неоправданного распространения наблюдений на слишком широкий круг явлений. В результате по возможности чётко формулируется эмпирическое открытие. Затем испытывается надёжность полученных заключений. Математики используют для этого моделирование. «*При построении модели происходит следующая идеализация: некоторые факты, известные лишь с некоторой долей вероятия или лишь с некоторой точностью, признаются «абсолютно» верными и принимаются за «аксиомы». Смысл этой «абсолютности» состоит ровно в том, что мы позволяем себе оперировать с этими «фактами» по правилам формальной логики, объявляя «теоремами» все то, что из них можно вывести. Понятное дело, что ни в какой реальной деятельности полностью полагаться на подобные дедукции невозможно. Причиной является хотя бы то, что параметры изучаемых явлений никогда не бывают известными нам абсолютно точно, а небольшое изменение параметров (например, начальных условий процесса) может совершенно изменить результат*»[230].

Небольшое изменение аксиом также может привести к совсем иным выводам. Чем длиннее и сложнее цепь рассуждений, тем менее надёжен окончательный результат доказательства. Вследствие этого сложная модель редко бывает полезной.

Создав свою модель, математик перестаёт сравнивать её с реальностью, абсолютизирует её значение и на практике может встретить затруднения. «*Математическая технология моделирования состоит в том, чтобы*

[230] Там же, с. 231.

от этой неприятности отвлечься и говорить о своей дедуктивной модели так, как если бы она совпадала с реальностью. Тот факт, что этот – явно неправильный с точки зрения естествознания – путь часто приводит к полезным результатам в физике, называют «непостижимой эффективностью математики в естественных науках»»[231].

Создание отвлечённой от практики дедуктивно-аксиоматической математики упразднило обычную в физике схему: наблюдение – модель – исследование модели – выводы – проверка наблюдениями. Она заменена облегчённым порядком действий: определение – теорема – доказательство. В результате неясно предназначение некоторых определений – обобщают ли они важные математические объекты или служат лишь схоластическому удобству изобретателя? Намекая на Бурбаки, Арнольд пишет о влиятельной группе математиков, мало знакомых с физикой, верящих в принципиальное отличие аксиоматического метода от моделирования в естествознании. И в связи с этим он заключил: *«У аксиоматического метода много преимуществ по сравнению с традиционным подходом – подобных преимуществам воровства перед честным трудом»*.

Сложившаяся ситуация вредна для работающих математиков и обучения. «*Попытки обойтись без этого вмешательства физики и реальности в математику – сектантство и изоляционизм, разрушающие образ математики как полезной человеческой деятельности в глазах всех разумных людей*». Арнольд вспоминает мнение Гильберта от 1930 г.: «*геометрия есть не что иное, как ветвь физики; геометрические истины ни в едином отношении не отличаются от физических*

[231] Там же, с. 231–232.

и устанавливаются так же, как они». Арнольд допускал, что Гильберт не относил геометрию к математике, может быть, имея в виду его программу формализма. У Бурбаки, по его мнению, формализм полностью вытеснил содержательную и наглядную науку об устройстве мира *«жонглированием логическими символами»*.

Критика Арнольда встретила отпор адептов абстрактной математики. Знаменитый французский математик, участник группы Бурбаки *Жан-Пьер Серр* ответил Арнольду в июне 1998 г.: *«Математика совершенно отлична от физики... Математикам не следует писать об этих философских вопросах, так как даже лучшие из них могут написать совершеннейшую чепуху»*[232].

Корни абстрактного подхода Арнольд усматривал в развитой французами *«картезианской точке зрения»*. Он разглядел ряд принципов воплощения философско-методологической позиции Декарта в современной абстрактно-аксиоматической математике, повлекших идею об отсутствии связи между математической реальностью и реальностью природного мира. Первый принцип – нет смысла сравнивать исходные положения научной теории, её аксиомы, с какой-то реальностью или с каким-то экспериментом. Т.е. аксиомы – это произвольные утверждения, не относящиеся к реальному миру. Второй принцип – если теория приводит к каким-либо заключениям, то бессмысленно сравнивать их с реальностью, проверять их справедливость экспериментально. Поскольку исходные аксиомы не имеют к реальности никакого отно-

---

[232] Цит. по: Арнольд В.И. *«Международный математический конгресс в Берлине»*// Вестник РАН, 1999, т. 69, №2, с. 174.

шения, то и соответствия выводов реальности также не стоит ожидать. Третий принцип – переход от аксиом к выводам должен быть чисто дедуктивной цепью силлогизмов по строгим правилам логики Аристотеля[233] без догадок и индуктивных заключений[234]. И это привело к разводу математики с физикой.

Доминирование дедуктивно-аксиоматической математики исказило критерии оценки математических работ и представление их результатов общественному мнению. Например, явная классификация двумерных поверхностей, утверждающая, что любая компактная связная ориентируемая поверхность без края – это сфера с некоторым числом ручек, даёт правильное представление о современной математике. Теорема о классификации поверхностей – великое достижение математического естествознания по его значению для приложений и для выработки правильного мировоззрения. Но она не получила достаточного освещения. И в то же время в качестве выдающихся успехов современной математики рекламируют решение проблемы Ферма или доказательство представимости всякого достаточно большого целого числа суммой трёх простых чисел. Это не способствует признанию пользы математической деятельности в глазах общества и вызывает скепсис в её отношении.

Арнольд полагал, что на выбор тематики исследований, на предпочтение интуитивного или формализованного способа рассуждений влияет психофизиоло-

---

[233] Арнольд ошибочно считал, что математическая логика совпадает с логикой Аристотеля, неоднократно заявляя об этом.

[234] Арнольд В.И. *«Наука математика и искусство математиков»*. – М.: МГУ, 2008, с. 25.

гия математика. Левое полушарие мозга, будто бы, отвечает «*за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов*», а правое – «*за пространственную ориентацию, интуицию и всё необходимое в реальной жизни*». Математики с преобладающим левополушарным мышлением оказались в большинстве, и это привело к засилью аксиоматической и схоластической математики, особенно в преподавании[235]. Но на дедуктивном пути строгих выводов прогресс науки невозможен. Для развития науки нужны практические приёмы познания – примеры, догадки, ошибки[236]. В математике они играют такую же важную роль, как и в естествознании: «*Математика состоит из дедукций в том же смысле, в каком стихи состоят из букв*».

Арнольд оптимистично видел будущее математики. Ему были чужды уныние и предсказания истощения её сюжетов. Он вспоминал, что Лагранж в 1781 г. написал Даламберу о перспективах математики: «*Шахта становится слишком глубока,... и, если не будут найдены новые жилы, то места по геометрии в академии станут тем, чем уже стали кафедры арабского языка в университетах*». И вот, прошло уже 200 лет, а «*новые жилы постоянно обнаруживались, и сейчас математика переживает расцвет, подобный расцвету живописи во времена великих итальянских мастеров*»[237]. Например, из квантовой физики вышла новая

---

[235] Арнольд В.И. *«Математика и математическое образование в современном мире»* – статья на основе доклада *«“Жёсткие” и “мягкие” математические модели»* на семинаре при Президентском совете РФ 1997 г.

[236] Арнольд В.И. *«Наука математика и искусство математиков»*. – М.: МГУ, 2008, с. 23.

[237] Арнольд В.И. *«Международный математический конгресс в Берлине»*// Вестник РАН, 1999, т. 69, №2, с. 174.

наука – геометрическая и топологическая физика, где понадобились многие прежде абстрактные разделы математики – от теории чисел до теории особенностей, от алгебр Ли до комбинаторики и теории графов.

Ю.И. Манин о математике как метафоре. Российский математик *Юрий Иванович Манин* родился в 1937 г. Он учился на мехмате МГУ в 1953–58 гг. и ещё студентом написал работу, результат которой вошёл в книгу Гельфонда и Линника[238]. Научным руководителем Манина был Шафаревич. По окончании аспирантуры в 1961 г. Манин защитил кандидатскую диссертацию, в 1963 г. – докторскую[239]. В 1960–92 гг. он работал в отделе алгебры МИАН, а в 1965–92 гг. – в МГУ. В 1967 г. он стал профессором кафедры Высшей алгебры мехмата МГУ. С 1992 г. Манин живёт и работает за рубежом. До 1993 г. он был профессором MIT (США). В 1993–2005 гг. – содиректором Института Макса Планка в Бонне, в 2002–05 гг. – профессором Северо-Западного университета в США. С 2005 г. Манин – заслуженный профессор Института М. Планка, Северо-Западного университета и внештатный сотрудник Отдела алгебраической геометрии МИАН.

Манин получил результаты во многих дисциплинах. Среди них – аналитическая и алгебраическая теория чисел, алгебраическая геометрия, некоммутатив-

---

[238] Манин Ю.И. *«О сравнениях третьей степени по простому модулю»*// Известия АН СССР. Серия математическая, 1956, т. 20, в. 5, с. 673–678. Результат также изложен в 10 главе книги: Гельфонд А.О., Линник Ю.В. *«Элементарные методы в аналитической теории чисел»*. – М.: Физматгиз, 1962.

[239] Диссертации: *«К теории абелевых многообразий»* (к.ф.-м.н.), *«Теория коммутативных формальных групп»* (д.ф.-м.н.).

ная геометрия, теория алгебраических групп, гомологическая алгебра, интегрируемые системы, математическая логика, теория вычислимости, квантовая теория поля, алгебраическая теория кодирования, история культуры, психолингвистика и др. Он опубликовал 11 монографий и более 300 научных статей.

В 1990 г. Манина избрали членом-корреспондентом РАН. Он состоит в научных академиях – Нидерландской, Европейской, Гёттингенской, Папской, Германской, Американской, Французской и является почётным доктором нескольких университетов.

У Манина есть ряд наград за научные успехи: премия ММО (1963), Ленинская премия (1967), золотая медаль Брауэра (1987), премия Фредерика Эссера Неммерса (1994), премия Рольфа Шока (1999), премия Фейсала ибн Абдул-Азиза Аль Сауда (2002), медаль Георга Кантора (2002), два германских креста (2007, 2008) и премия Бойяи (2010).

Манин часто высказывался об особенностях математического доказательства, о связи математики и естествознания, о математическом творчестве и месте математики в культуре[240]. Он – один из немногих математиков, глубоко размышлявших о философии. Манин писал о математической онтологии, истине и строгости. Его рассуждения исходят из оригинального понимания смысла математической деятельности. Свою

---

[240] Некоторые работы Ю.И. Манина на эти темы: *«Человек и знак»*// Природа, 1977, №5; *«Математика и физика»*. – М.: Знание, 1979; *«Доказуемое и недоказуемое»*. – М.: Сов. Радио, 1979; *«Трилогия о математике»*// Знание – сила, 1982, №3; *«Вычислимое и невычислимое»*. – М.: Сов. Радио, 1989; *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008.

позицию он называет *«эмоциональным платонизмом»*. Математику Манин считает особым видом языка. «*Чистая математика – это огромный организм, построенный полностью и исключительно из идей, возникающих в умах математиков и в этих умах живущих*»[241].

В определении математики есть три подхода. Математику связывают с математическими текстами, с концептуальным полем определений и доказательств. Её считают деятельностью, помогающей контролировать материальные вещи. Или думают, что в платоновском мире идей есть вечный Лабиринт Математики, постепенно исследуемый математиками. Манин видит смысл в каждом из этих взглядов.

Математики обращаются с идеями как с настоящими вещами[242]. Идеи сохраняют форму в контексте своего использования. Они приспособлены для связи с другими математическими идеями, и эти связи могут становиться новыми математическими объектами, образуя очередной уровень иерархии абстракций. «*В самом низу этой иерархии лежат мысленные образы самих вещей и способы манипулирования ими. Чудесным образом оказывается, что даже абстракции высокого уровня могут каким-то образом отражать реальность: знание о мире, полученные физиками, можно выразить только на языке математики*»[243].

Есть разные режимы мышления математика. Например, – построение осмысленных текстов сочетанием конечной системы знаков по точным правилам. Некие тексты признаются *«интересными»* по неявным

---

[241] Манин Ю.И. *«Математика и культура»*/ *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 15.
[242] Там же, с. 20.
[243] Там же, с. 20.

критериям. Эти действия – результат работы левого полушария мозга, связанного с лингвистической и алгебраической деятельностью. Или возможно подсознательное управление зрительными образами, опирающееся на опыт и предчувствие осуществимых результатов, использующее в качестве признаков правильности мысли гармонию и симметрию. Оно регулируется правым полушарием и проявляется в геометрии, пластическом искусстве и музыке. В сознании математика эти режимы сложно сочетаются из-за разной скорости обработки информации в них.

Математический текст несёт определения, теоремы и доказательства. Определения знакомят с объектами. Теоремы указывают их свойства или отношения с иными объектами. Доказательства обеспечивают правдоподобие суждений и состоят из цепи простых, стандартно обосновываемых предложений. Средства познания в математике – это модель, теория и метафора[244]. Модель даёт количественное или качественное описание определённого класса явлений. Теорию отличают более масштабные притязания. Это уже некая концепция реальности: *«приглашение к построению работающих моделей»*[245]. Метафору Манин представляет *«нетехнически»*, как *«соединение похожего с непохожим, при котором одно не может превратиться в другое»*[246]. В математическом смысле она означает сравнение некоторых

---

[244] Греческое слово *«метафора»* буквально значит *«перенос»*, а в языкознании означает *«переносное значение слова»*.
[245] Манин Ю.И. *«Математика и культура»*/ *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 35.
[246] Манин Ю.И. *«Математика как метафора»*/ *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 53.

явлений с какой-то математической концепцией: *«это приглашение к размышлению о том, что мы знаем»*.

Математические определения – это специфические умственные формы, чуждые нетренированному уму. Евклидовая традиция соединяла в определениях пояснения, зрительные образы и аксиомы идеализированных объектов. Бурбаки задали новый подход к организации математического знания. Теперь математики обходятся фундаментальными мысленными представлениями и наборами свойств, конструируя новые объекты из старых. Такие определения описывают некоторые структуры на множествах. Этот подход обеспечивает общение математиков разных специальностей. *«Математики развили специфическую дискурсивную практику, которую можно назвать «культурой определений». В этой культуре много усилий вкладывается в уяснение содержания (семантики) основных абстрактных понятий и синтаксиса их взаимоотношений, в то время как выбор слов (и в ещё большей мере обозначений) признаётся делом не первостепенной важности, а в большей степени – и произвольным соглашением, основанным на соображениях удобства, эстетики или на стремлении вызвать подходящие ассоциации»* [247].

Постановка значимых проблем сосредотачивает усилия многих математиков в общем направлении и мотивирует молодых учёных. Но сами проблемы часто являются лишь догадками о справедливости частного утверждения. В то время как исследовательская программа «*предполагает широкий взгляд на большую область, какие-то части которой вовсе не исследованы, а про какие-то дру-*

[247] Манин Ю.И. *«Математика и культура»/ «Математика как метафора».* – М.: МЦНМО, 2008, с. 29.

гие имеются догадки, основанные на аналогиях, разборе простых частных случаев и т.п. Различие между проблемой и исследовательской программой является не абсолютным. Например, первая проблема Гильберта – гипотеза континуума, – которая в эпоху Гильберта и Кантора выглядела как конкретная задача, положила начало большой исследовательской программе, в результате работы которой было, помимо прочего, установлено, что ни один из двух ответов не выводим в рамках общепринятой аксиоматической теории множеств»[248].

Размышляя об истине, Манин отмечает её высшую ценность для математики и зависимость от доказательств: *«для математики нужны именно доказательства, понимаемые как цепочки хорошо организованных стандартных шагов, а не как акты демонстрации (вопреки этимологии слова «доказательство»*[249]*). Помимо всего прочего, это означает, что современная математика представляет собой по существу лингвистическую деятельность, опирающуюся на язык, обозначения и манипуляции с символами как на средство убеждения собеседника даже в тех случаях, когда речь идёт о реальности (геометрической, физической или ещё какой-либо). Связанность рассуждения, не содержащего противоречий и избегающего пробелов, играет важную роль в установлении того обстоятельства, что то или иное высказывание действительно доказывает то, на доказательство чего претендует. Строго говоря, статус постулатов P, на которых основывается доказательство утверждения S, не обязан быть предметом обсуждения в математике: она отвечает главным образом за структуру вывода»*[250].

---

[248] Там же, с. 30.

[249] Латинское слово *«de-monstratio»* – *«доказательство»* – буквально означает *«завершение поучения, показа»*.

[250] Манин Ю.И. *«Истина, строгость и здравый смысл»*/ *«Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 76–77.

Манин показал многообразие мнений о математической истине в историческом, эпистемологическом, психологическом и социальном аспектах этого явления. Способность к доказательствам задана инстинктивными предпочтениями, рождающими радость или недовольство от встречи с интеллектуальным вызовом. Создание доказательства социально обусловлено, ведь математик следует авторитетным образцам. Идеальное доказательство – это воображаемый текст, в котором теорема последовательно выводится из ранее утверждённых аксиом. Но этот идеал недостижим из-за большой длины самых простых формальных выводов и трудностей их проверки, что не исключает стремления к поддержанию стандартов строгости.

Спор о полезности математики между В.И. Арнольдом и Ю.И. Маниным. В конце 1990-х Манин и Арнольд дискутировали о существе и общественной полезности математики. История их полемики такова.

Перед Международным Математическим Конгрессом в Берлине 1998 г. было задумано опубликовать мысли видных учёных о математике. Выход сборника намечался на начало нового тысячелетия. Арнольд был одним из редакторов проекта[251], а Манин вошёл в число 30 соавторов. В статье Манин написал, что математика – это искусственный язык, необходимый для описания природы. В ходе внутреннего развития и по своей логике математика создаёт виртуальные миры, отличающиеся красотой и сложностью. Странно, что

---

[251] *«Mathematics: Frontiers and Perspectives»*, edited by V.I. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur. – Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2000, 459 pp. (перевод *«Математика, её границы и перспективы»*. – М.: ФАЗИС, 2005. 624 с.)

«применяя формальные правила к данному математическому тексту, можно на выходе получить текст, который, кажется, несёт новое знание»[252]. Одно уравнение может описывать разные феномены. У математики нет заданных правил физической интерпретации. Надо отделять интерпретацию математической конструкции от самой конструкции. С каким миром сообщается математика? Многие считают, что это мир платоновских смыслов, где числа существуют независимо от своих моделей, а гипотеза континуума либо истинна, либо ложна. *«Недавно я участвовал в споре по поводу компьютерного моделирования: теория это или эксперимент? Мой ответ был таков: это теория «реальной реальности» и эксперимент в платоновской реальности. Каков бы ни был философский статус этих споров, некоторые из наиболее красивых и высокоразвитых разделов математики, без сомнения, являются платоновскими. Я имею в виду такие объекты, как поле всех алгебраических чисел и его группа Галуа. Это центральный объект теории чисел,... Если история геометрии почти неотделима от истории теоретической физики, то теория чисел почти ничего не взяла из нашего опыта жизни в реальном мире»*[253].

Такие идеи возмущали Арнольда: *«Математика, согласно Манину, – это отрасль лингвистики или филологии, занимающаяся преобразованием конечных цепочек символов некоторого конечного алфавита в другие такие цепочки при помощи конечного числа «грамматических» правил»*[254]. Арнольд заранее раскритиковал тезисы Манина, а тот обещал их

---

[252] Манин Ю.И. *«Математика как профессия и призвание»/ «Математика как метафора»*. – М.: МЦНМО, 2008, с. 127.
[253] Там же, с. 128.
[254] Арнольд В.И. *«Что такое математика?»* – М.: МЦНМО, 2004, с. 14.

развить, и написал: *«Я убеждён, что наука, и в частности математика, не является движущей силой нашей цивилизации. Карты и машины у нас есть действительно благодаря науке, но наука не решает за нас, куда нам надо идти, а куда не следует. Думать иначе значило бы вернуться в эпоху архаического восприятия знания как одного из видов магии, когда человек, предсказавший затмение или то, как разрешается некоторая ситуация с неясным исходом, рассматривался как колдун, вызывающий события с помощью манипуляций с их символическими представлениями. На самом деле биологической функцией мысли является не вызывать, а предотвращать спонтанные реакции, а основной социальной функцией науки в наши дни, возможно, является приостановка лихорадочной активности постиндустриального общества»*[255].

Арнольд же пересказывал Манина так[256]: *«Тезис Манина состоит в том, что польза от математики состоит вовсе не в способствовании какому-либо прогрессу, а, скорее, в её «огромном вкладе в решение основной проблемы постиндустриального человечества». Проблема эта, по Манину, состоит вовсе не в ускорении какого-либо прогресса человечества, а в том, чтобы этот прогресс всеми силами тормозить. «Ведь, – говорит он, – если бы умники, занимавшиеся проблемой Ферма, усовершенствовали вместо этого самолёты и автомобили, то вреда для человечества было бы куда больше!» Математические задачи, по Манину, служат именно цели торможения: они отвлекают внимание умных людей от более опасных занятий. Дальнейшее рассуждение такое: проблема Ферма «к сожалению, теперь утратила свою полезность», так как она уже решена Уайлсом и*

---

[255] Манин Ю.И. *«Математика как профессия и призвание»/ «Математика как метафора».* – М.: МЦНМО, 2008, с. 126.
[256] Арнольд В.И. *«Что такое математика?»* – М.: МЦНМО, 2004, с. 30–31.

потому больше не способна отвлекать. Следовательно, нужно сформулировать другие (столь же нелепые) вопросы, которые будут отвлекать математиков следующих поколений».

Арнольд оспаривал идеи предыдущих работ Манина. Между критикуемыми текстами и их толкованиями можно найти немалые расхождения. Арнольд задиристо отвергал эстетизм Манина. Эскалацией полемики он хотел привлечь большее внимание к затронутой теме. Но разжечь новый интерес математиков и философов к постижению целей науки не удалось. Пришли другие времена. *«Похоже, что нам гораздо меньше, чем современникам Пуанкаре, интересны философские тонкости»*[257].

По обыкновению, оппоненты остались при своих мнениях, только усилив свои аргументы. Ведь любой спор таит различие индивидуальных судеб, в данном случае создавших несовместимые взгляды на суть математики и её предназначение. Ясно, что обе позиции всегда найдут своих сторонников.

[257] Манин Ю.И. *«Математика как метафора»/ «Математика как метафора».* – М.: МЦНМО, 2008, с. 52.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ТВОРЧЕСТВЕ

В этой главе мы собрали идеи наших выдающихся современников об особенностях математического познания, об истине и строгости в математике, о критериях оценки математических работ и этических проблемах в научном сообществе. Мы использовали опубликованные воспоминания, выступления и беседы, некоторые из которых нам посчастливилось записать самостоятельно. Нас вдохновляет творческий оптимизм собеседников, впечатляет глубина их размышлений о философии математики. Чтобы представить многообразие собранных наблюдений, мы группируем их в виде больших цитат, сопутствуемых необходимыми справками и комментариями.

Л.С. Понтрягин о выборе темы исследования. *Лев Семёнович Понтрягин* (1908–1988) знаменит выдающимися работами и поразительной целеустремлённостью. Из-за несчастного случая в 14-летнем возрасте он полностью ослеп, но сумел воплотить своё математическое призвание. Отец Понтрягина был счетоводом, мать – портнихой. Он обучался в МГУ в 1925–29 гг. на специальности «чистая математика». В 1930–32 гг. Понтрягин был доцентом кафедры алгебры и сотрудником НИИ математики и механики МГУ. С 1931 г. он работал в лаборатории колебаний Института физики при МГУ. В 1935 г. Понтрягин стал доктором физ.-мат. наук и профессором МГУ. В 1939 г. его избрали членкором АН СССР. В 1970 г. Понтрягин организовал кафедру оптимального управления на ВМК МГУ, которой заведовал до конца жизни. Одновременно он работал в МИАН СССР: с.н.с. (1934–38), завотделом топологии и геометрии (1939–59), завотделом дифференциальных уравнений (1959–88).

Понтрягин был учеником П.С. Александрова. Начальной его темой была топология, в 1932 г. он доказал закон двойственности, связавший группы Бетти компакта евклидова пространства с группами Бетти его дополнения. Открытием этого закона была заложена теория топологической двойственности. Понтрягин построил теорию характеров коммутативных топологических групп. Свои исследования по топологической алгебре он суммировал в книге *«Непрерывные группы»* (1938), удостоенной Государственной премии СССР 1941 г. Понтрягин обнаружил новые топологические инварианты гладких многообразий – характеристические классы Понтрягина. В 1950-х гг. Понтрягин занялся прикладными задачами. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений он изучал сингулярные возмущения систем с малым параметром при производных. Известны работы Понтрягина в теории оптимальных процессов. Здесь он установил *«принцип максимума»* об условиях оптимальности управления. В 1958 г. Понтрягина избрали академиком АН СССР. В 1962 г. ему (с тремя учениками) присудили Ленинскую премию за работы 1956–61 гг. В 1966 г. Понтрягин получил премию Лобачевского за топологические труды. В теории дифференциальных игр он исследовал важные для военной авиации задачи преследования и уклонения, разработав эффективные процедуры управления. В 1975 г. он получил Государственную премию СССР за учебник *«Обыкновенные дифференциальные уравнения»*. Понтрягин написал около 300 научных работ и был награждён тремя орденами Ленина (1953, 1967, 1978).

Понтрягин активно трудился для математического сообщества. Он состоял в редколлегии *«Известий АН СССР. Серии математической»* (1958–75) и др., был главным редактором журналов *«Applied mathematics and optimization»* (1974–88), *«Математический сборник»* (1975–87). С 1971 г. он был членом бюро Отделения математики АН СССР, вице-президентом Исполкома Международного математического союза (1970–74), ординарным членом Исполкома (1974–78), многократно представлял советских математиков за рубежом.

В ярких воспоминаниях *«Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва»*, написанных к 75-летию, он подробно рассказал о своей личной и академической жизни. Мемуары раскрывают его представления о характере математического творчества.

Понтрягин не соглашался с Пуанкаре, во многом сводившего математическое творчество к бессознательному, интуитивному уровню. Математические результаты Понтрягин разделял на два типа. Результаты первого типа – предвидимы и формулируемы заранее. Математическое исследование устанавливает или отвергает их истинность. Главный интерес здесь состоит в доказательстве, а не формулировке. Примером является арифметическая проблема Гольдбаха. Результаты второго типа нельзя предвидеть заранее. Исследуется совершенно новое математическое явление. В данном случае интересен не только результат, но и правильная его формулировка. Гипотеза Пуанкаре о предельных циклах – пример этого типа.

Понтрягин рассуждал о выборе научной темы, который для математика особенно ответственен и труден. Причина сложности выбора лежит в природе математики. Появившись как прикладная наука, она создала чрезвычайно увлекательные теории, далёкие от приложений. Красота теорий сама по себе доступна только профессионалам и не может быть единственным оправданием для занятия ими. «*Но всё же теории, не имеющие приложения, а имеющие большую внутреннюю стройность, нельзя считать незаконнорождёнными и отвергать. Они составляют внутреннюю ткань всей математики, и их иссечение могло бы нарушить её целостность. Кроме того, известны случаи, когда первоначально лишённые всяких приложений понятия находят в дальнейшем свои приложения*»[258].

Понтрягин советовал интересоваться прикладными задачами. Они помогают развитию, ведь из глубины одного разума не извлечь ничего значительного. «*Существует, однако, совершенно другой подход к математической проблематике. Это стремление решить знаменитые проблемы, т.е. такие, которые давно поставлены, но не поддаются решению. Прекрасными примерами таких проблем являются проблема Гольдбаха и великая теорема Ферма. Но такой подход кажется мне уж очень спортивным, а ведь наука не спорт. Её главной целью является подчинение людям окружающей материальной действительности с тем, чтобы использовать её для жизни людей. Некоторые считают, что, решая трудные проблемы, математики совершенствуют свой аппарат для того, чтобы в дальнейшем его можно было использовать по прямому назначению. Но я полагаю, что лучше уж совершенствовать свой аппарат, употребляя его сразу по прямому назначению для решения сколько-нибудь прилагаемых к жизни задач*»[259].

Для пояснения характера математической работы Понтрягин ссылается на Пуанкаре. Тот заметил, что

---

[258] Понтрягин Л.С. *«Жизнеописание Л.С. Понтрягина, составленное им самим»*. – М.: ИЧП «Пима В», 1998, с. 85.
[259] Там же, с. 86.

любое математическое построение состоит из простых шагов, но сплетение простых переходов образует уже неочевидную конструкцию. Для понимания её требуется большой опыт и математическая одарённость. Математическое творчество сплетает сложные логические фрагменты. В начале цепи рассуждений стоят предпосылки, а в конце – результат. Как математик приходит к своей цели? «*Для этого он, по моему представлению, намечает сперва узловые точки будущего куска. Для будущего сложного сплетения следует удачно наметить его узловые точки. После того, как эти узловые точки будут намечены, заполнить оставшиеся пустоты будет легче, чем построить кружево в целом. Для простоты будем считать, что всё сложное сплетение, ведущее от предпосылки к результату, представляет собой последовательность логических шагов, которую нужно пройти. Таким образом, узловые моменты построения состоят из промежуточных утверждений, причём каждое следующее отстоит от предыдущего на некоторое число мелких логических переходов. Если такая последовательность этапов уже намечена, то переход от каждого к следующему становится делом более простым и более видимым. Математик намечает эти промежуточные результаты, пользуясь своим опытом и ассоциативной памятью, позволяющей ему по аналогии улавливать сходство между различными математическими утверждениями и обретать веру без всякой уверенности в том, что переход от каждого этапа к следующему возможен. Если намеченные этапы выбраны удачно и ведут действительно к цели, то потом удаётся восстановить постепенно отрезки всего пути*»[260]. Осуществление построения требует большого количества проб. Талант математика заключается в умении быстро отличать правильный путь от ложного. Озарение – плод

[260] Там же, с. 86–87.

огромного предварительного труда и отбора из множества неподходящих путей – верного и лучшего. Понтрягин не согласен с Пуанкаре в том, что нахождение правильного пути есть преимущественно подсознательная работа. Подсознание для Понтрягина – это склад накопленных представлений, из которого без должного запроса не всплывает ничего полезного. В своей практике он всегда мог осознать цепочку промежуточных представлений, каждое из которых было связано с предыдущими близкой ассоциацией. Все ассоциации также были сознательными. И хотя не все мысли возникают под внешним воздействием, иногда внешние впечатления подталкивают к определённой цепочке ассоциаций, как это и было с Пуанкаре, осознавшим изоморфность групп автоморфных преобразований и преобразований плоскости Лобачевского.

Под математической интуицией Понтрягин понимал автоматизированный опыт мышления, накопленный после большой работы. «*Некоторые отдельные связанные между собой математические представления уже настолько хорошо проассоциированы в голове человека между собой, что переход от одного к другому не требует цепочки коротеньких ассоциаций, а совершается одним скачком. Возможность такого скачка является результатом опыта математического мышления. Большой труд, приводящий в результате к созданию множества ассоциаций, – вот основа математического творчества*»[261]. Понтрягин в силу личных причин был сосредоточен на доступных внутреннему умозрению процессах и поэтому мог отследить свою рефлексию более отчётливо, чем обычные люди. В связи с этим его суждение о математической интуиции является особенно

[261] Там же, с. 88.

интересным. Понтрягин показал возможный механизм проявления интуиции как мыслительного процесса, не подменяя его речами о некой таинственной способности прозревать истину.

Пример Понтрягина показывает, что математика доступна всем, кто с характерными наклонностями и хорошей ассоциативной памятью обладает достаточным трудолюбием. Его математический мир был полон увлечённым и ответственным трудом. В нём чрезвычайно важно умение сосредоточенно заниматься избранной проблемой, чтобы сплетаемые сети математических построений способствовали желаемой цели.

И.М. Гельфанд о перспективах математики. Выдающийся российский математик *Израиль Моисеевич Гельфанд* (1913–2009) родился на Украине в семье бухгалтера. В Винницкой области он поступил в химическую профессионально-техническую школу, но из-за репрессий в отношении отца, причисленного к эксплуататорам, был из школы исключён. В 1930 г. Гельфанд поехал в Москву к дальним родственникам, устроился вахтёром в Ленинскую библиотеку и посещал вечерние лекции по математике в университете. В 1932 г. он, без какого-то высшего образования, поступил в аспирантуру МГУ под руководство Колмогорова и стал работать в университете. В 1935 г. Гельфанд защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«Абстрактные функции и линейные операторы»*. С 1939 г. он стал работать в МИАН СССР. Гельфанд был одним из создателей теории банаховых алгебр и в 1940 г. защитил докторскую диссертацию по этой теме – *«О нормированных кольцах»*. В 1943 г. он стал профессором МГУ.

Тогда Гельфанд изучал бесконечномерные унитарные представления непрерывных групп, полезные для теоретической физики. Также он занимался обобщёнными функциями, топологическими линейными пространствами, обратными задачами спектрального анализа, квантовой механикой.

В послевоенные годы Гельфанд участвовал в стратегических прикладных работах[262], связанных с советским атомным проектом, где требовались массовые расчёты. Он вошёл в Расчётное бюро в МИАН, в 1950 г. стал его завсектором, а фактически – научным руководителем подразделения. В 1953 г. Расчётное бюро стало частью нового института – Отделения прикладной математики (ОПМ) МИАН, созданного для решения математических оборонных задач атомной и космической тематики. Вклад Гельфанда в эту работу был отмечен Сталинской (1953) и Ленинской (1961) премиями. В 1953 г. его избрали членкором АН СССР.

Работая на оборону страны, Гельфанд общался с И.В. Курчатовым и М.А. Леонтовичем. Это определило его интерес к термоядерной теме – математическому моделированию плазмы. В 1958 г. Гельфанд вместе с С.И. Брагинским и Р.П. Федоренко рассчитал сжатие плазменного шнура магнитным полем, что было одним из первых в мире вычислительным исследованием магнитной газодинамики. В 1960 г. Гельфанд руководил расчётами магнитного поля в торе. В это же время Гельфанд заложил математические методы рентгеноструктурного анализа кристаллов. Эти идеи позднее он развил для задач компьютерной томографии. Гельфанд разрабатывал приложения математики к биоло-

---

[262] Афендиков А.Л., Брушлинский К.В. *«И.М. Гельфанд и прикладная математика»*// Успехи математических наук, 2009, т. 64, №6(390), с. 181–186.

гии. С рядом коллег он организовал лабораторию в Институте биофизики АН СССР, где моделировали движение живых организмов и физиологию мозжечка. В межфакультетской лаборатории математических методов в биологии МГУ Гельфанд занимался моделированием поведения клеток.

Прикладные исследования Гельфанд совмещал с решением задач фундаментальных математики. Он не раз говорил, что без «чистой» математики прикладная наука иссякнет. Рекомендуя Гельфанда в академики, в 1960 г. Колмогоров написал: «*Для меня нет, однако, сомнения, что И.М. Гельфанд соединяет в себе исключительный талант математика-теоретика с незаурядными способностями к решению более грубыми методами, опирающимися на хорошо развитую геометрическую, механическую и физическую интуицию, конкретных задач прикладного характера*». Но академиком его избрали гораздо позже – в 1984 г.

Гельфанд играл важную роль в советской математике. В 1966–70 гг. он возглавлял ММО. В 1967 г. он создал журнал *«Функциональный анализ и его приложения»*, публикуя в нём статьи по любым актуальным математическим вопросам. Гельфанд единолично определял его редакционную политику. Для воспитания советских математиков много значила Всесоюзная заочная математическая школа, организованная им при мехмате МГУ. Через неё прошло более 70 тысяч школьников. Был известен на весь мир математический семинар Гельфанда в МГУ, проводимый еженедельно с 1943 г. вплоть до эмиграции Гельфанда в США в 1989 г. В Америке он побыл профессором Гарвардского университета (1989–90), MIT (1990), Ратгерского университета (1991–2009). За долгую научную жизнь Гельфанд написал более 800 научных статей и

30 монографий. Советское государство наградило его двумя Сталинскими премиями (1951, 1953), орденом *«Знак Почёта»* (1953), тремя орденами Ленина (1954, 1956, 1973), Ленинской премией (1961), двумя орденами Трудового Красного Знамени (1963, 1983), орденом Дружбы народов (1975), Государственной премией России (1997). Из иностранных наград Гельфанда упомянем премию Вольфа по математике (1978), медаль Вигнера (1980), премию Киото (1989), стипендию Мак-Артура (1994) и премию Стила (2005). Он был почётным членом дюжины зарубежных академий и почётным доктором семи университетов.

Гельфанд не писал отдельных работ по истории и философии математики. Но во многих выступлениях он передал личное видение математики. Гельфанд не отделял математику от культуры в целом, сравнивая её с музыкой, поэзией и философией. В его представлении классическую музыку по стилю и организации с математикой связывают *«красота, простота, точность и безумство идей»*. С философией математику роднит преодоление разрыва между видимым и сущим. Математика является адекватным языком различных областей науки: физики, инженерии и биологии.

Замечательным историческим примером Гельфанд считал геометрию Евклида. Люди всегда искали модели пространственных соотношений окружающего мира. Но аксиоматика Евклида принципиально отличается от современных Гильбертовых аксиом геометрии. Система аксиом Евклида порождает у людей адекватные пространственные образы. Гильберт очистил фундамент Евклида, удалил из него все логические излишества, оставив лишь непротиворечивую схему геометрии. Это полезно для вычислительной машины, так как формальные законы лучше пригодны для компьютера. Но обучать такой геометрии людей очень сложно: *«У Гильберта точкой, плоскостью и пространством называется всё, что угодно, лишь бы были выполнены аксиомы об их связи. Это великое достижение науки. Можно считать точку – плоскостью, а плоскость – точкой (в проективной геометрии), чем объясняется двойственность. Но это уже другая задача – о структуре геометрии. По существу же уровня Евклида сравнительно достаточно и сейчас. … На уровне представлений в геометрии Евклида первая задача обучения геометрии может считаться решённой, потому что научиться геометрии – это значит понять и привести в соответствие интуитивное восприятие окружающего мира с пространственной геометрией. Начинать же с построения геометрии как строгой логической системы, наверное, достаточно, чтобы забить голову любому, даже самому хорошему ученику»*[263]. Только во второй черёд геометрию можно подавать через логически непротиворечивую схему. Математическая потребность в соответствующем языке в XX в. преимущественно утолялась аксиоматическим методом. Гельфанд указал типичный пример такого подхода: *«когда замечательному математику Гротендику нужно было понятие следа перенести в алгебраическую геометрию, он вместо явной конструкции следа сформулировал аксиоматически те требования, которые он налагает на след»*[264].

Опираясь на богатый личный опыт эффективных приложений, Гельфанд ожидал понимания того, что математика должна стать фундаментом иных областей знания. *«Математики всегда чувствуют, что кроме глубокого внут-*

---

[263] Гельфанд И.М. *«Два архетипа в психологии человека. Лекция при вручении премии Киото (1989)»*. – Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990, №122. с. 6.
[264] Там же, с. 7.

реннего содержания, математика должна быть основой для работы в других областях. Это является причиной того, почему математиков, особенно тех, которые воспринимают математику как часть всей культуры, привлекает возможность связи математики с такими областями как биология, экономика, медицина и др. Это особенно относится к современным математикам второй половины XX века, для которых, как правило, структурный подход является неотъемлемой частью их профессионального мышления»[265].

Математика является одним из высших достижений человеческого духа и вместе с тем – точным языком физики и многих других наук. Надлежит создать адекватные языки других дисциплин – биологии, экономики и психологии. *«Ещё большая ответственность состоит в том, чтобы противодействовать неразумному и опасному использованию точных математических и логических систем за пределами их применимости… кто, кроме математиков, может помочь предупредить о злоупотреблении ею в наш технократический век»*[266].

В своём прогнозе ближайшего развития математики Гельфанд указал две перспективных темы. Во-первых, радикальное переосмысление пространственных понятий в связи с квантовой гравитацией и, во-вторых, совершенствование комбинаторики. Уникальная интуиция, позволявшая ему всегда быть на переднем крае науки, делает его прогноз весьма ценным для математиков. Сейчас растёт востребованность комбинаторики из-за компьютеризации всех областей жизни. А новые пространственные понятия создаются в некоммутативной дифференциальной и алгебраической геометрии.

---

[265] Там же, с. 7.
[266] Там же, с. 8.

Учеников у Гельфанда было больше, чем указано в списке *The Mathematics Genealogy Project*[267]. Он любил работать с молодыми соавторами, щедро одаряя своими идеями и жёстко направляя общую работу. Гельфанд не скрывал алгоритмы своего математического творчества: «*Первое, что я помню, относится к 5–6 классу. … Если я не мог расшифровать, как решить данную задачу, я заглядывал в ответ, научился по постановкам задач и ответам восстанавливать методы их решения. В частности, я тогда понял и запомнил на всю жизнь, что новой областью можно овладеть, решая задачи, и никогда не зазорно посмотреть в ответ, поскольку, когда мы решаем какую-либо проблему, всегда имеется гипотеза об ответе. Занятия математикой вообще похожи на решения задач, в которых кое-что известно об ответе*»[268].

По воспоминаниям, Гельфанд не любил спорт и пренебрегал физкультурными упражнениями, принятыми в окружении Колмогорова. Но в науке он был прославленным многоборцем олимпийского уровня. Вся его жизнь была неослабевающей тренировкой ума, временами прерываемой тщательно подготовленными научными триумфами. В коллегах Гельфанд не терпел самодовольство, безалаберность и лень, что отчасти объясняет его непростой характер.

В.А. Ильин о математических проблемах и оценке их решения. Выдающийся российский математик *Владимир Александрович Ильин* (1928–2014) родился в историческом городе Козельске, но с трёх лет жил в Москве. Его отец был доктором физ.-мат. наук, профессором математики в Промышленной академии им. И.В. Сталина, а мать – школьной учитель-

[267] Сейчас там указано 26 состоявшихся математиков.

[268] Ретах В.С., Сосинский А.Б. *«Интервью с академиком И.М. Гельфандом»*// Квант, 1989, №1, с. 5.

ницей физики и математики. В 1945 г. Ильин получил школьный аттестат с золотой медалью, без экзаменов поступил на физфак МГУ и окончил его с отличием в 1950 г. Он учился в аспирантуре физфака МГУ по специальности *«математическая физика»*. Его научным руководителем был А.Н. Тихонов. В 1953 г. Ильин защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«Дифракция электромагнитных волн на некоторых неоднородностях»* и был принят на кафедру математики физфака. В 1958 г. он защитил докторскую диссертацию *«О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа»* и в 1960 г. стал профессором МГУ. В 1970 г. Ильин перешёл на новый факультет ВМК МГУ и с 1974 г. заведовал созданной им кафедрой общей математики. Он также работал в МИАН и других институтах.

В 1987 г. Ильина избрали членкором АН СССР, в 1990 г. он стал действительным академиком. В 1994 г. его выбрали академиком Международной академии наук высшей школы. Ильин имел советские и российские ордена: Трудового Красного Знамени (1980), Дружбы народов (1988), Почёта (1999), «За заслуги перед Отечеством» IV (2004) и III степени (2013). Он был лауреатом Государственной премии СССР (1980), двух Ломоносовских премий МГУ (за научную работу – 1980 и за педагогическую деятельность – 1992), премии Министерства высшего и среднего специального образования СССР «За лучшую научную работу» (1988), премии Президента России в области образования (2005). Помимо этого его выбрали почётным гражданином Козельска (1998), заслуженным профессором МГУ и лучшим лектором МГУ 2000 г.

Академик Ильин подготовил больше 90 кандидатов наук, консультировал почти 30 докторантов. С

1995 г. он был главным редактором журнала *«Дифференциальные уравнения»*, а с 1998 г. – заместителем главного редактора *«Докладов Академии наук»*. Он написал популярные университетские учебники по математическому анализу, линейной алгебре, аналитической геометрии и почти 400 математических работ. Ильин занимался задачами математической физики, дифференциальными уравнениями и операторами, математическим моделированием дифракции и рефракции электромагнитных волн и граничным управлением колебательными процессами[269].

Научный стиль Ильина определили первые успехи. Студентом он изучал краевые задачи математической физики и нашёл ошибку в знаменитой книге Куранта и Гильберта. Он рассказал об этом эпизоде так: «*Я начал свою научную деятельность с «негатива». … В то время настольной книгой специалиста по математической физике были «Методы математической физики» Куранта и Гильберта. Там с помощью билинейного ряда строилась функция Грина для прямоугольника, и было написано, что этот билинейный ряд, который представляет функцию Грина, сходится абсолютно и равномерно в любой точке прямоугольника, за исключением малой окрестности, в которой вторая компонента совпадает с первой. Функция Грина зависит от двух точек, – нужно чтобы одна из них лежала вне малой окрестности другой. … Я не знаю – Тихонов мне подсказал, или это я сам? … Тихонов сказал: «вот посмотрите эту работу, она какая-то странная». … Первая моя работа заключалась в том, что ряд, о котором в этой книге написано, что он сходится абсолютно и равномерно, не сходится*

---

269 Белоцерковский О.М., Ломов И.С., Моисеев Е.И., Осипов Ю.С., Садовничий В.А., Шишмарёв И.А. *«Владимир Александрович Ильин (к 80-летию со дня рождения)»*// Успехи математических наук, 2008, т. 63, №6(384), с. 173–182.

абсолютно ни в одной внутренней точке прямоугольника. Строго эта теорема не была доказана. И математически неграмотно выражение, что «функция Грина представляется», … так как он не сходится абсолютно, то надо указать – в каком порядке. Тихонов доказал, что если суммировать ряд в порядке возрастания собственных чисел, то он сходится, не абсолютно, конечно, но сходится и даже более общий ряд. … Мои первые работы были выполнены на 4 курсе, и я получил первую премию как студент на конкурсе научных работ. Тихонов оставил меня после этого в аспирантуре»[270].

В 1953 г. Ильин изучал электромагнитную дифракцию на поверхностях с угловыми линиями – береговую дифракцию радиоволн или возбуждение неидеальных радиоволноводов с угловыми линиями. Задачи имели оборонное значение. Первые математические модели здесь были построены М.А. Леонтовичем, Г.Д. Малюжинцем, В.А. Фоком и С.И. Гринбергом. Ильин предложил более точные модели этих задач, выявляющие реальные эффекты, отсутствующие в прежних моделях. Так, в задаче о дифракции Ильин нашёл логарифмическую особенность потенциала на угловых линиях, проявляющуюся в усилении громкости принимаемых радиосигналов при подходе судна к береговой линии. Ильин вспоминал: «*Тихонов предложил заняться прикладной задачей о дифракции электромагнитных волн на клине. Вначале он не уточнил постановку задачи. Потом, когда он работал в ВАКе, в его руки попала докторская диссертация Георгия Даниловича Малюжинца, ученика Михаила Александровича Леонтовича. Она показалась ему очень сомнительной. Диссертация была посвящена дифракции не на идеально проводящем*

[270] Транскрипция видеозаписи *«Беседа о науке с академиком Владимиром Александровичем Ильиным. Москва, 21 декабря 2013 года»* (http://youtu.be/-wNElPBq_Zg)

клине, а на хорошо проводящем, то есть, клин сконструирован из проводника, – например, – металлического. Другие примеры рассматривали Гринберг и Фок в задаче о дифракции радиоволн вблизи поверхности моря. … Почему эти задачи было трудно решать в то время? Тогда не было ЭВМ, а для того, чтобы решать эту задачу полностью, на 100% математически строго, нужно было задать уравнение Максвелла вне клина и внутри клина. Уравнения Максвелла сводятся к уравнениям второго порядка в частных производных, и на поверхности соприкосновения клина и воздуха надо было сопрягать из уравнений Максвелла эти условия. Задача на сопряжение непосильной была, – тогда не было таких машин, на которых можно было это считать. Поэтому академик Леонтович придумал остроумную вещь: не нужно решать задачу на сопряжение, а нужно поставить на поверхности хорошего проводника граничные условия третьего рода, которые связывают нормальную производную плюс коэффициент h умноженный на саму функцию. Причём коэффициент h мал для хорошего проводника, а решение получается с точность до h^2. … Представьте себе, если речь шла, допустим, о морской воде, у которой проводимость выше в 80 раз, h там – это как 1/80, а в квадрате – это уже единица на 80^2, что для физиков вполне достаточная точность решения. И Малюжинец, ученик Леонтовича, делал вот что. Он ставил на поверхности клина, т.е. двугранного угла, приближённые краевые условия Леонтовича третьего рода, и с этими краевыми условиями решал задачу вне клина, так она сильно упрощается. Но беда заключается вот в чём. Леонтович, – человек, видимо, математически достаточно грамотный, – вывел свои граничные условия из уравнений Максвелла и написал совершенно чётко, что они верны в окрестности не любой точки соприкосновения хорошего проводника и диэлектрика, а только в окрестности точки, где поверхность гладкая, а у клина есть ребро и всё идёт насмарку. … Что делал Малюжинец? Он, собственно, не ставил на ребре ничего, он ста-

вил условия на двух плоскостях, а потом были какие-то аляповатые рассуждения, типа того, что ребро – множество меры 0 по сравнению с двумерным объектом плоскостей, ну, и не будем там ничего ставить. Тихонову попала эта докторская диссертация, – тогда докторские рецензировались в обязательном порядке всегда. … Речь идёт примерно о 1952–53 годе. Я защищал кандидатскую диссертацию летом 1953 года. Тихонов сказал, что возможны два варианта. Хотя он и не ставил краевые условия на ребре, но, может, оно и ничего не дало бы, и поэтому, может быть, Ваша работа будет теоретическим оправданием того, что Малюжинец действовал верно, – это один возможный вариант. И он вполне достаточен для кандидатской диссертации. А второй возможный вариант заключается в том, что Вы строго математически докажете, что он действовал неверно. Оказался второй вариант. … Как я действовал? Это настолько тривиально, что можно понять без особого математического образования. Любое электромагнитное поле можно представить в виде суперпозиции, т.е. суммы двух полей, у одного из которых электрический вектор поляризован параллельно ребру, а у другого так поляризован магнитный вектор. И любое магнитное поле представляется в виде такой суммы. Давайте отдельно рассматривать эти два поля. У одного электрический вектор поляризован, а у другого – магнитный. Но так как он поляризован вдоль ребра, задача из трёхмерной становиться двумерной. … Нужно взять плоскость, перпендикулярную ребру и вместо двугранного угла получится плоская задача: дан угол, и вершина этого угла будет соответствовать ребру. Что я делал, как математик? ... Возьмём этот линейный угол. Я взял последовательность точек a_n на одной стороне угла и b_n на другой стороне угла, – обе последовательности стремятся к вершине, оставаясь на своей стороне угла. А между точками a_n и b_n я загладил угол. Вместо острия ребра я сгладил угол кривой с непрерывной кривизной. Я написал задачу с условием Леонтовича с таким загла-

живанием. И я сразу понял, что я на верном пути. Через две недели я получил негативный результат. Оказалось, если вы начнёте устремлять n к бесконечности, то существует один и тот же предел, который не зависит от того – по какой кривой между a_n и b_n вы загладили этот контур. И в случае вывода формулы Грина получается добавочный член в пределе, который отличается от прочих членов, дающих решение. Все прочие члены в решении ограничены. А добавочный член обращается на ребре в бесконечность и имеет логарифмическую особенность. … Я написал в своём автореферате следующее (теперь бы я так не написал): «В работе рассмотрена задача о дифракции электромагнитных волн на цилиндрических поверхностях, имеющих угловые линии. Это не обязательно клин, может быть даже прямоугольный цилиндр. Нами показано, что при наличии у проводящей поверхности ребра или угловой линии, в решении появляется добавочный член, который имеет логарифмическую особенность на ребре. Так как все другие члены в решении ограничены, то в окрестности ребра этот добавочный член является превалирующим. Вследствие этого, решение, найденное авторами [1 и 2] (автор был один – это докторская диссертация Малюжинца), отличается в малой окрестности ребра от правильного результата на сколь угодно большую величину». … Ну, и я шёл на защиту кандидатской с большим трепетом. Тихонов меня предупредил – будьте готовы к возможной дискуссии. Не пришли ни Леонтович, ни Малюжинец, ни Каценеленбаум, которого я тоже упомянул. Хотя я всем разослал автореферат. Я об этом сейчас сожалею – у Малюжинца отобрали докторскую степень, но потом он снова стал доктором, несколькими годами позже»[271].

Ильин получил важные результаты о классической разрешимости смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Он установил разре-

[271] Там же.

шимость этой задачи в произвольном нормальном цилиндре, представляющим собой область, где при любой непрерывной граничной функции разрешима задача Дирихле уравнения Лапласа. До работ Ильина в известных исследованиях разрешимости этой задачи, от границы области требовали высокую гладкость, неограниченно растущую с ростом числа измерений.

Ильин любил менять темы исследований: *«Я часто меняю направление научного творчества. Я люблю это делать. С 1998 года, т.е. последние 15 лет меня занимает теория управления, граничное управление процессом колебаний»*[272].

Среди коллег он был известен замечательной памятью и стихотворными экспромтами:

Сейчас считаю управленье
Своею темой магистральной,
Но вновь вернусь я без сомненья
К своей тематике спектральной.

Надеюсь в ней я для начала
Освоить новые аспекты.
Они потребуют немало
Фантазии и интеллекта.

Меня с каким-то вожделеньем,
С какой-то тягою астральной
Влечёт к спектральным разложеньям
И к асимптоматике спектральной.

Но и с проблемой управленья
Я не хочу совсем расстаться.
Жду, что поможет провиденье
Мне сил и выдумки набраться[273].

---

272 Видеозапись от 21.12.2013 (http://youtu.be/-wNElPBq_Zg)
273 *Ильин В.А. «О моей научной тематике»*/ *«Стихотворения»*. – М.: МАКС Пресс, 2010, с. 253.

Ильин легко делился своими планами и успехами: *«Сейчас с учениками мы выиграли огромный железнодорожный грант за то, что нашли, как успокаивать колебания двух рельсов, смыкающихся в стрелке. И даже сконструировали платформу, которая по нашей формуле ездит и смотрит, как и что там подвинтить. … Вот основная задача, которая нами решена. Колебание характеризуется двумя вещами – смещением и скоростью. Начальный момент – это начальный момент смещения и в конце – финальный момент. Вначале я один, а потом мы с моим учеником Моисеевым задачу решили. Эти публикации оценены как лучшие за 2007 год в МАИК Наука/Интерпериодика. … Как из произвольно заданного состояния, – какого угодно смещения, – перейти в какое угодно финальное смещение? Мы указываем, какие нужны граничные условия управления, чтобы из этого начального условия перевести систему в произвольно заданные финальные условия. … Потом встаёт вопрос: а что, если на достаточно большом промежутке времени, на котором вы работаете, эта задача неоднозначно решается? Т.е. существуют не единственные граничные условия. … Тогда встаёт задача оптимизации. Оптимизирует обычно интеграл от квадрата производных скорости – это энергия. Интеграл граничной энергии. Его нужно оптимизировать, чтобы не попасть в резонанс. … Временами я возвращаюсь – есть такие знаменитые теоремы Пелля, Хаусдорфа-Юнга-Рисса из теории функций. … У меня есть новые результаты, – буду публиковать их в 2014 году, – обобщения классических теорем Рисса, Пелля, Хаусдорфа-Юнга на многомерный случай, на случай, скажем, собственных функций оператора Лапласа в производной n-мерной области. Я продолжаю быть заведующим кафедрой ВМК, главным научным сотрудником Стекловского института, вычислительного центра имени Дородницына и института программных систем РАН. … Я за свою жизнь выиграл много грантов. У меня есть такое стихотворение:*

Без напряженья и без муки
Позиций не сдаю совсем:
Обрёл я гранты Роснауки,
Ведущих школ и ОФИ-эМ.

Учеников взрастил когорту
И продолжаю их растить.
К науке отношусь как к спорту:
Стараюсь всех опередить.

Не перестал публиковаться
Я без соавторов один.
Извольте сами разобраться –
Пигмей я или исполин»[274, 275].

Будучи главным редактором академического журнала, Ильин имел богатый опыт оценки математических работ: «*У нас есть два сорта публикаций. Один – нормальные статьи. Но есть и краткие сообщения. Я их сам внимательно смотрю. Я ещё единственный зам. главного редактора «Докладов Академии наук», – там тоже публикации размещаются без доказательств. … У меня есть опыт и ВАКовский. Я примерно знаю – от кого что ждать, а нового автора смотрим всё – автора просим снабдить статью хотя бы фрагментарным доказательством того, что это верно. Если Игорь Шафаревич подаст работу в «Доклады», то его я не буду рецензировать. Я пока что не «прокалывался». Это ещё ВАКовский опыт сказывается. Я там 6 лет возглавлял совет по математике.*

Прошло примерно 40 лет,
как я работал на физфаке,
и возглавлял в тогдашнем ВАКе
по математике совет.

---

[274] Видеозапись от 21.12.2013 (http://youtu.be/-wNElPBq_Zg)
[275] Ильин В.А. *«Шутливое самовосхваление»*/ *«Стихотворения»*. – М.: МАКС Пресс, 2010, с. 253.

Тогда Комиссией он звался,
и ВАК Минвузом возглавлялся.
И с этих пор вошёл
я в мир математической элиты.
И стали для меня открыты
и вес, и роль научных школ.

Я – молодой, не без отваги
комиссией руководил,
В которую тогда входил
сам Лев Семёнович Понтрягин.
В неё входили млад и стар:
Еругин, Прохоров, Гончар,
И Шура-Бура и Ульянов,
и Дезин, и Сарманов.

Отнюдь не всех мы утверждали,
иных пришлось нам отклонять.
И этим мы конечно стали
врагов себе приобретать.
Мы часто слабых не пускали,
создав затор на их пути.
За это долго не давали
мне в Академию пройти»[276].

Говоря о творческом долголетии, Ильин уверял, что при систематической работе математические способности с возрастом не угасают, указывая на пример алгебраиста Ширшова (1921–1981): «*А.И. Ширшов очень поздно пришёл в науку. Это опровергает точку зрения П.С. Александрова, что быстрее всех старятся математики. Он говорил: «Их опережают, разве что опереточные актрисы, и кошки». Грин, о функциях которого мы сегодня уже говорили, работал чуть ли не портовым грузчиком и стал заниматься мате-*

[276] Видеозапись от 21.12.2013 (http://youtu.be/-wNElPBq_Zg)

матикой очень и очень поздно. Если математик начал заниматься вовремя и не проявил себя хорошими результатами, то, вероятно, что он себя уже и не проявит. Мне вот уже 85 лет, а я в 2012 и 2013 году 8 статей опубликовал. Можно заниматься и в моём возрасте, если позволяет память. Что такое занятие математикой? Вы нанизываете на утверждение А – В и смотрите, что из А и В вытекает. А если у вас плохая память или вы сидите в таком месте, где вам мешают – цепочка обрывается, и всё нужно начинать заново. Анатолий Илларионович обладал и хорошей памятью, и способностью работать»[277].

Ильин любил выражать мысли в стихах, рифмуя с лёгкостью и изяществом. Вот как он изобразил свой творческий процесс:

Вчера решенье я искал
Одной задачи управленья.
Хоть очень долго я не спал,
Но так и не нашёл решенья.

А утром очень поздно встал
И вдруг, себе на удивленье,
Почти что сразу написал
Давно искомое решенье,

Молниеносно набросал
Статью в журнал без промедленья
И, безусловно, испытал
Большое удовлетворенье[278].

Владимир Александрович Ильин относился к математической работе как к спортивному празднику. По впечатлениям от краткого общения, он сам выглядел джентльменом, был элегантно одет, доброжелате-

---

[277] Там же.

[278] Ильин В.А. *«Как я искал решение задачи»*/ *«Стихотворения»*. – М.: МАКС Пресс, 2010, с. 253.

лен и открыт. Подробные воспоминания о нём готовят к публикации его ученики и коллеги.

А.Т. Фоменко о строгости математического доказательства и творчестве. Выдающийся российский математик *Анатолий Тимофеевич Фоменко* родился в 1945 г. в небольшом шахтёрском посёлке около города Сталино, с 1961 г. переименованного в Донецк. В 1950 г. он с родителями переехал в Магадан, а в 1959 г. его семья вернулась на Украину – в Луганск. Отец его был горным инженером, кандидатом технических наук, автором 15 монографий, 150 научных статей и нескольких детективных романов. Мать работала учительницей русского языка и литературы. Школьником Фоменко интересовался естественными науками, в 1956 и 1959 гг. получил 3 бронзовых медали ВДНХ, победил во Всесоюзной заочной олимпиаде по математике. В газете *«Пионерская Правда»* в 1958–59 гг. напечатали его фантастический рассказ *«Тайна Млечного пути»* о космическом путешествии 2020 г. В 1962 г. Фоменко поступил на Отделение механики мехмата МГУ. Его первым научным руководителем был завкафедрой теоретической механики, профессор Румянцев (1921–2007). Задачи механики вскоре привели Фоменко в топологию. В конце 4 курса он перевёлся на математическое Отделение и стал учеником выдающегося советского геометра, завкафедрой дифференциальной геометрии, профессора Рашевского (1907–1983). Студентом 5 курса, в 1967 г. Фоменко стал соавтором и иллюстратором знаменитой книги *«Гомотопическая топология»* (первая её часть написана с Гутенмахером, вторая – с Фуксом). В 1969 г. Фоменко стал работать на кафедре дифференциальной геометрии мехмата МГУ и защитил кандидатскую диссертацию *«Классификация вполне геодезических многообразий, реализующих нетривиальные циклы в римановых однородных пространствах»*. В 1972 г. он защитил докторскую диссертацию *«Решение многомерной проблемы Плато на римановых многообразиях»*. В 1980 г. Фоменко стал профессором кафедры высшей геометрии и топологии – ею заведовал академик Новиков, соавтор Фоменко по широко известным математическим монографиям. В 1990 г. Фоменко был избран членкором АН СССР, в 1991 г. стал действительным членом РАЕН. С 1992 г. он заведует кафедрой дифференциальной геометрии и её приложений мехмата МГУ. В 1993 г. Фоменко стал действительным членом АН ВШ, в 1994 г. он был избран академиком РАН, в 2009 г. стал академиком АТН РФ.

Фоменко является лауреатом премии ММО (1974), премии по математике Президиума АН СССР (1987), лауреатом Государственной Премии РФ в области математики (1996). Он – автор 35 многократно переизданных и переведённых математических книг и более 300 статей по математике. Под руководством Фоменко защищено 39 кандидатских диссертаций, он консультировал 9 докторантов.

Фоменко входит в редколлегию журналов: *«Вестник Московского университета. Серия Математика и Механика»*, *«Математический Сборник»*, *«Reviews in Mathematics and Mathematical Physics»*, *«Central European Journal of Mathematics»*.

Главные научные интересы Фоменко относятся к дифференциальной геометрии и топологии. Он решал задачи теории минимальных поверхностей и проблему Плато. Занимался вариационными методами, интегрированием гамильтоновых систем, интегрируемыми уравнениями на группах и алгебрах Ли в математической физике, компьютерной геометрией, алгоритмическими методами в топологии. Важным успехом Фоменко было создание теории топологической классификации интегрируемых динамических систем. С эмпирико-статистическими методами связаны его исследования исторических текстов. В соавторстве с Носовским и Калашниковым Фоменко разработал ряд современных методов научной хронологии.

Вспоминая о своём пути в математику, о формировании научного интереса и выборе задач, Фоменко рассказал: «*Я поступил на кафедру теоретической механики, и моим руководителем стал замечательный учёный Валентин Витальевич Румянцев. Потом он стал академиком РАН, а тогда был профессором и членкором. Мне очень повезло. Он – знаменитый учёный, специалист по устойчивости, принимал участие в массе программ, имеющих военное и прикладное значение, и напрямую был связан с разработкой космических летательных аппаратов. Многие его работы были секретными. С ним работали и мы, в частности, рассчитывали устойчивость по Ляпунову. Я с самого начала был вовлечён в такой проект, где стоял вопрос расчёта устойчивости. У меня была интересная курсовая работа, которая использовалась в проекте, которым занимался Валентин Витальевич. Он очень хорошо относился ко мне и ко всем студентам.*

Вообще, атмосфера на мехмате в те годы была «отеческой». Дистанции между студентами и преподавателями, в общем-то, не было. Я знаю, как выглядит ситуация в японских, американских, канадских университетах, – я в них много работал. Там дистанция от студента до преподавателя больше. Есть «небожители», а есть простые люди, которые смотрят снизу вверх на «богов Олимпа». У нас никогда такого не было. И это очень хорошо, я считаю. Мы сохраняем эту атмосферу на *мехмате, и я сам стараюсь её поддерживать. Доброжелательное отношение моих преподавателей очень сильно помогало мне в науке.*

Параллельно с этим я посещал семинары академика Дмитрия Евгеньевича Охоцимского, – это был известный учёный, так же занимавшийся космосом, расчётом траекторий космических аппаратов. Это теоретическая и небесная механика. На его семинары я ходил и прослушал два его спецкурса по небесной механике. Оттуда я узнал очень много связанного с небесной механикой, с теорией расчёта траекторий аппаратов (космос, ракеты, боеголовки), теории гироскопов. Охоцимский был для меня вдохновителем работ по небесной механике.

Потом в конце четвёртого курса я понял, что меня все эти годы тянуло в математику. С первого курса я посещал семинары по топологии. Один курс по общей топологии вёл академик Павел Сергеевич Александров. И ещё был курс по алгебраической топологии. Вёл его замечательный учёный – Дмитрий Борисович Фукс. Он тогда был молодым человеком, очень увлечённым этой наукой. Я понял, что в математику меня тянет всё больше и больше. Недаром меня с детства увлекала геометрия, а в школе – стереометрия. Я подал заявление о переводе меня с механики на математику. …

Я перешёл на Отделение математики к Петру Константиновичу Рашевскому, заведующему кафедрой дифференциальной геометрии, и сохранил тесный научный контакт с Румянцевым. И это продолжалось много лет – до самой его смерти. Это удачный пример, когда руководители не только не обижаются, но и поддерживают инициативу своих учеников, и продолжают с ними работать. Я много лет работал на стыке механики и математики. …

Мне повезло, что я посещал семинары академика Павла Сергеевича Александрова и Николая Владимировича Ефимова по геометрии Лобачевского и её приложениям. Я там и там делал *доклады. Не по своим работам, а по тем, которые они мне давали, делал обзоры по топологии и геометрии Лобачевского. Меня уже знали два выдающихся математика. Ефимов был тогда деканом, Александров – академиком, человеком знаменитым. Я обратился к ним с просьбой поддержать меня при переводе. Они поддержали, но были проблемы с досдачей курсов по программе, которая существенно расходилась. Надо было в течение полугода сдать несколько экзаменов. Я их сдал на отлично, но это потребовало много трудов и нервов. Было всё очень непросто.*

Сначала у меня были задачи, с механикой не связанные. Рашевский предложил мне изучить работы по когомологиям однородных пространств. Это была очень модная в те годы тема. Однородные пространства возникают в приложениях – в физике, в механике. Очень популярный объект. Было много задач, которые нацеливали на изучение их топологии и геометрии. Я получил задачу по классификации однородных пространств максимального ранга. Надо было изучить свойства их когомологий. Сами эти пространства были описаны в работах замечательного математика, – тоже ученика Рашевского, – Олега Васильевича Мантурова, а мне нужно было продолжить эти работы, изучив когомологии этих пространств. Я это сделал, и это была моя дипломная работа. Для меня это была новая тема, и я на год – на полтора перешёл в совершенно новую для меня тематику.

Но потом у меня вновь возник интерес к вещам, которые находятся на стыке математики, физики и механики. Я увлёкся вариационными задачами. Моя кандидатская диссертация была на тему групп и алгебр Ли, однородных пространств, когомологий однородных пространств, топологии вполне геодезических подмногообразий однородных симметрических пространств... Я там сделал очень неплохую работу. Полное описание вполне геодезических подмногообразий в пространствах с высокими симметриями. …

Мы быстро входили в темы. Это было не столько чтение книг и статей, сколько участие в работе семинаров, разговоры в коридорах с коллегами. Была атмосфера бурного котла, в котором мы учились устно в беседах. На 14–15 этажах висели объявления о сотне спецкурсов, спецсеминаров. Был огромный выбор. Я посещал много семинаров. Раньше прочих – Ефимова, семинар Фукса, и, естественно, – большой общемосковский семинар по геометрии и её приложениям Рашевского. Каждый день в конце, после занятий мы проводили время или на спецкурсах или на спецсеминарах. Была очень активная деятельность.

Мой интерес к когомологиям был очень активен и основан на большой заинтересованности математиков в этой сфере. Потом я перешёл к тематике вариационных задач. Эта деятельность имеет корни и в физике, – там зародились одномерные и двумерные вариационные задачи, принцип Ферма, уравнение Эйлера, функционалы и их критические точки, экстремальные поверхности и экстремальные функции, индексы. Я снова вспомнил свои начальные работы по устойчивости в механике. И увлёкся знаменитой в то время задачей – многомерной проблемой Плато. Это очень яркий сюжет. Его корни лежат в работах XVII века. Задача вполне естественная. Она известна любому школьнику – на уроках физики преподаватели показывают замечательный эксперимент, когда в мыльную воду опускается проволочный контур. После извлечения контура на нём возникает очень красивая радужная плёнка. Это важный пример вариационной задачи. Мыльная плёнка – это минимальная поверхность. Как мы знаем из школьной физики, она минимизирует энергию поверхности в данной границе – эта плёнка имеет наименьшую энергию, а потому и наименьшую площадь. Возникает задача описать – сколько есть минимальных поверхностей с данной границей, которая выходит на данный контур? Задача возникла не сама по себе. Важна её приложимость. Одно из самых известных её приложений – сооружение крыш, особенно в два-

дцатом веке, наименьшего веса – стадионов, огромных административных зданий. Чем больше крыша, тем больше вес – архитекторы хотят уменьшить вес. Вопрос – как? Ответ простой: сделать крышу в виде минимальной поверхности. … Это двумерная задача, она была решена в 20–30-е годы XX века. Последняя точка была поставлена Радо и Дугласом. …

Следующий естественный шаг был, – так как задача возникает в размерности не только два, но и три, и выше, – как описать многомерные минимальные поверхности? То есть, минимизирующий функционал будет уже не для двумерной площади, а для многомерного объёма с заранее фиксированной границей. Вопросы те же – существование такой многомерной минимальной мыльной плёнки и сколько их есть, – их конечное число, она одна, их счётное множество или континуум? Так для меня возникла большая новая тема – исследование многомерной проблемы Плато. Задача сложная, было много подходов к этой задаче, этим занималось много специалистов и у нас, и на Западе. … Были предложены разные варианты – как эту задачу ставить, что понимать под границей. В многомерном случае ситуация сложная. Когда я этим занялся, до меня были достигнуты важные успехи в работах Федерера, Райфенберга и Морри. Они доказали существование многомерной минимальной поверхности в классе когомологий. Когомологии были различные – в смысле теории дифференциальных форм – когомологии де Рама, были когомологии в смысле Чеха и Райфенберга. В этих постановках было доказано существование решения проблемы Плато. То есть, существует многомерная поверхность, реализующая минимум функционала объёма с данной границей, где граница понимается в смысле когомологий. Это то, что было сделано до меня.

Но оставался нерешённым вопрос – что будет, если мы рассмотрим задачу Плато в классе плёнок, которые параметризованы многообразием, когда многообразие имеет край в виде мно-

гообразий? … Мне удалось эту задачу сформулировать. А потом решить в виде, наиболее близком к классическому варианту»[279].

Позднее по нашей просьбе Анатолий Тимофеевич Фоменко ответил на вопросы о философии науки[280]. О месте математики в ряду других дисциплин он написал: *«Математика, безусловно, находится в фундаменте всех естественных наук, однако, её роль в познании мира этим отнюдь не исчерпывается, и справедливо описывается классическим высказыванием Карла Гаусса: Математика – царица наук. Имеется в виду – практически всех. Конечно, и гуманитарных. Это стало особенно ясно в наше время, когда математика, – в том числе как основа информатики и вообще «компьютерного взрыва» последних лет, – проникла буквально во все сферы человеческой деятельности – в космос, медицину, банковское дело, искусство, спорт. Математические доказательства строят и организуют мышление человека, лежат в основе «здравого смысла» и вообще интеллекта, формируют полноценную личность. А что лежит в фундаменте самой математики? Ответ таков: арифметика и геометрия. Математике следует систематически обучать поголовно всех детей и подростков, независимо от их будущего выбора профессии. Потом, выйдя в жизнь, они скажут – спасибо».*

Проблему строгости математического доказательства А.Т. Фоменко видит так: *«Математическая строгость доказательств – неоднозначное понятие. Грубо говоря, можно выделить две подхода. Один – более формально логический, требующий алгоритмического и даже "формульного" описания каждого шага рассуждений. Такой стиль мышления хорошо пред-*

---

[279] Транскрипция видеозаписи *«Беседа о науке с академиком Анатолием Тимофеевичем Фоменко. Часть 1: О математике. Москва, 27 июня 2013 года»* (http://youtu.be/LDf-AWFgy1Y)

[280] Электронное письмо А.Т. Фоменко от 5 сентября 2015 года А.Б. Верёвкину и Н.Г. Баранец (архив авторов).

ставлен, например, в математической логике, теории чисел, алгебре, дискретной математике, теории вероятностей, статистике, информатике, в компьютерных науках. Другой подход условно может быть назван геометрическим. Здесь стиль доказательств иной, часто "наглядный". Недаром Давид Гильберт говорил: «Наглядное понимание – это большая доказательная сила». Геометрическое воображение и интуиция играют огромную роль в современной математике, особенно, в вопросах, связанных с математической физикой, геометрией, топологией.

Во многих глубоких математических работах, посвящённых сложным проблемам, – например, в многомерной геометрии, в вариационном исчислении и т.п., – активно используется "наглядный жаргон", выработавшийся при исследовании двумерных и трёхмерных образов. Что-то вроде – "разрежем поверхность", "склеим листы поверхности", "приклеим цилиндр", "вывернем сферу наизнанку", "присоединим ручку" и прочее. Такая, на первый взгляд "неформальная" терминология, отнюдь не прихоть математиков. Скорее, "производственная необходимость", ввиду сложности объектов, с которыми приходится иметь дело. Математическое мышление часто вынуждено опираться на наглядные образы, поскольку это необходимо при доказательстве технически трудных результатов. Бывает так, что доказательство математического факта удаётся сначала "разглядеть" лишь в неформальных геометрических образах, и только потом удаётся оформить его как строгое логическое рассуждение. Недаром интуиционизм и конструктивизм иногда сталкиваются на поле «строгости доказательств». То, что является доказательством для одних, не является доказательством для других. Отсюда споры математиков, иногда весьма жёсткие. Доходящие до обвинений в «отсутствии доказательств».

В то же время, понятие о математической строгости доказательства более или менее одинаково у каждой группы профессиональных математиков, придерживающихся выработанно-

го ими «группового консенсуса», хотя оно и трудно формализуется. Отсюда иногда проистекают трудности в оценке математических работ. Иногда даже происходят конфликты математических школ, придерживающихся разных взглядов. Это, к сожалению, отражается и на экспертных оценках. Например, – статей, книг, диссертаций, заявок на гранты и т.п. Отсюда – незатихающая борьба разных течений в математике. Но это – неотъемлемый элемент прогресса».

Результаты математической работы А.Т. Фоменко видит таким образом: *«Во-первых, открытие новых «математических миров», новых направлений. То есть, пионерские работы, выводящие математиков на ранее неисследованное поле. Если найденное поле богато, то «пионеры» тут же начинают собирать с него богатый урожай, быстро «снимают сливки», то есть обнаруживают ранее неизвестные, но фундаментальные законы и факты. А потом сюда стекаются многочисленные последователи, начинающие более глубоко «вспахивать новое жизненное пространство». Однако такие вдохновляющие открытия первопроходцами «новых миров» происходят редко. Они во многом определяют дальнейшее развитие науки.*

Во-вторых, продуктом деятельности математиков является решение знаменитых научных проблем. Например, решение проблемы Ферма (Э. Уайлс), гипотезы Пуанкаре (Г. Перельман)... Такие события тоже случаются редко. Здесь уместно аналогия с выдающимися рекордами в спорте. Они случаются нечасто и запоминаются надолго. Пока не будут перекрыты следующим громким рекордом.

В-третьих, продуктом являются математические исследования в русле уже существующих направлений. Такова основная масса современной математической продукции. Без неё развитие математики немыслимо. Это – та питательная среда, внутри которой взращиваются первопроходцы и рекордсмены».

А.Т. Фоменко отмечает изменение современной математики: *«Бурбаки, безусловно, сыграли выдающуюся роль. Причем сразу во многих отраслях математики. Однако, по моему мнению, сегодня влияние их идей и методов стало менее заметным и как бы «перешло в фундамент». Центр тяжести математических интересов и дискуссий сегодня сместился»*.

Как и многие российские учёные, А.Т. Фоменко обеспокоен возобновлением математической традиции и реформами последнего времени: *«Современное состояние математики в нашей школе тяжёлое. В частности, упорное проталкивание ЕГЭ, вопреки нашим традициям и мнению многих профессионалов, сильно навредило нашему математическому (да и не только) образованию в стране. Во-вторых, государство должно активно финансировать не только школу, но и высшее образование. Тогда в математику потянется больше молодых и талантливых людей. Выдающиеся математические достижения сегодня возникают, в основном, внутри достаточно большого научного сообщества. Нужна богатая «питательная среда», рождающая особо яркие таланты»*.

А.Т. Фоменко не принимает идею внешнего регулирования математики: *«Нет, планировать математическое творчество нельзя. Но и управление науки грантами малоэффективно. Эффективно вот что: направленное и повышенное финансирование В ЦЕЛОМ тех областей науки, на которые государство желает опереться. В современном мире учёный, работающий в необходимой для государства области знания, должен иметь достойную заработную плату. Это привлечёт молодежь и повысит престиж данного направления. Гранты должны быть лишь конкурентной добавкой, позволяющей активному учёному помогать ученикам, приглашать коллег, устраивать конференции и т.п. Это, скорее надстройка, чем базис.*

Активное внедрение в научное сообщество системы грантов заставляет некоторых (а может быть, даже многих) учёных *«клепать» множество средне-уровневых статей, лишь бы вписаться в рамки системы. Вообще, государство, если оно желает существовать и развиваться, обязано достойно и не скупясь, финансировать «три кита»: образование, армию, медицину. А не рекомендовать им "зарабатывать самим", как иногда можно услышать "сверху"».*

А.Т. Фоменко оптимистично смотрит на перспективы развития математики и не тревожится о гипотетическом *«конце науки»*: *«Нет, никакого застоя в современной математике я не вижу. Знаю много ярких и бурно развивающихся направлений. В одном из них работаю я сам, вместе со своими учениками. Разговоры о «конце науки» происходят либо от недостаточной информированности, либо относятся к категории тех возрастных причитаний-брюзжаний, что, дескать, раньше и вода была лучше, и воздух был чище, и солнце было ярче, и молодежь была умнее».*

Особо не увлекаясь онтологией, А.Т. Фоменко имеет собственный взгляд на статус математических объектов: *«Для меня математический объект, в том числе, многомерный, – это физическая реальность, хотя и живущая часто лишь в нашем воображении. «Объект» можно как бы повертеть, потрогать его с разных сторон. Некоторые классики считали, что мы видим лишь тени, отбрасываемые на наш мир проплывающими где-то физическими фигурами. Может быть, в математике эти два подхода переплетаются. Не исключено, что разное восприятие математических объектов («тень» или «физическая реальность») как-то влияет на конкретное математическое творчество учёного, «окрашивает» его».*

А.Т. Фоменко полагает, что поиск фундамента математики по-прежнему интересен не только для историков или философов науки, но и для самих математиков: *«Основания математики были интересны всегда, интересны сегодня, и будут интересны в будущем. Такие понятия* *как: число и алгоритм; доказательство и его сложность; логический вывод; логические операции и их «надёжность и сложность»; границы логики; интуиция и её границы; геометрическое воображение и его возможности; различные понятия «бесконечности», – всё это волнует математиков, как и в прошлые эпохи. Каждое новое поколение учёных стремится по-своему и заново осознать тот фундамент, который поддерживает их исследования и придаёт им уверенность. С течением времени выясняется, что понятия, казавшиеся совсем недавно такими простыми и очевидными, вновь нуждаются в осмыслении, усложняются. Например, понятие «очень больших натуральных чисел» и алгоритм сравнения их друг с другом, оказывается, таят в себе «подводные камни», уводящие нашу мысль в сложную фрактальную геометрию».*

Математическую вселенную Анатолия Тимофеевича можно рассматривать через призму его графических работ[281]. Она видится суровой и космически неумолимой, подобной природе зимнего Магадана. Одинокий искатель созерцает здесь абсолютный, но чуждый человеку порядок. И на первый взгляд плоские образы предсказуемы. Но почему тогда удивительны фрактальные фигуры, раскрывающие дискретную динамику континуума? Аскетичность геометрического мира иллюзорна. За мнимой линейностью бурлит многообразие возможностей и жизнеутверждающая гармония.

Ю.Л. Ершов о «задачном подходе» в философии математики. Выдающийся российский логик *Юрий Леонидович Ершов* родился в Новосибирске в 1940 г. Его родители были инженерами-железнодорожниками. В 1958 г. он поступил на мехмат Томского университе-

[281] Fomenko A.T. *«Mathematical Impressions».* – Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1990, 184 p.

та, но вскоре перевёлся в Новосибирский университет. Его научным руководителем был знаменитый советский алгебраист, академик А.И. Мальцев – основатель сибирской школы алгебры и логики. В 1963 г. Ершов защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«Разрешимость элементарных теорий»*, а в 1965 г. – докторскую диссертацию *«Элементарные теории полей»*. В 1967 г. Ершов стал завотделом математической логики Института математики СО АН СССР. В 1970 г. его избрали членкором АН СССР, а в 1991 г. – академиком РАН. С 1977 г. он также заведует кафедрой алгебры и математической логики НГУ. В 1986–94 гг. Ершов был ректором Новосибирского университета. С 1992 г. он возглавлял НИИ математико-информационных основ образования (с 1998 г. – это Институт дискретной математики и информатики).

Сейчас Ю.Л. Ершов возглавляет новосибирскую школу алгебры и логики. Он является ведущим специалистом по разрешимости и неразрешимости элементарных теорий. К его достижениям относится решение классической проблемы о разрешимости элементарной теории поля р-адических чисел. Он нашёл новые поля с разрешимой элементарной теорией, доказал алгоритмическую неразрешимость теории конечных симметрических групп и ряда других теорий. У Ершова есть важные результаты в теории алгоритмов и теории моделей. Он создал общую теорию нумераций, получившую многочисленные приложения в математической логике. На основе работ Ершова в теории рекурсии были разработаны концепции семантического программирования.

Ершов – один из авторов нового подхода к обоснованию математики, развивающего идеи Гильберта.

Ершов считает, что поскольку математика имеет дело с математическими объектами, то её суть в доказательствах утверждений об этих объектах. И если такие доказательства имеются, то объект можно считать существующим. Во избежание фундаментальных парадоксов, Ершов редуцирует философию математики к *задачному подходу*.

Он замечает, что математическая работа заключается в постановке и решении конкретных задач. Но философское изучение математических теорий зачастую не учитывает их задачную область. И это становится источником противоречий. Работая с конкретной задачей, математик, во-первых, ищет её правильную постановку, и, только во-вторых, ищет её решение. Постановка задачи требует определённых знаний, позволяющих сформулировать её в рамках одной системы рассуждений, но решается она, возможно, в рамках иной, расширенной системы.

Процесс решения математической задачи Ершов делит на три стадии[282]. На первой стадии *постановки* – фиксируется слабая (с некими условиями на доказуемость истинных высказываний) элементарная теория, и в ней очерчивается формально осмысленная задача. Теоремы выбранной теории – это предполагаемое постановкой задачи знание. На второй стадии *подготовки* решения – берётся некоторое непротиворечивое расширение исходной теории и принимается план поиска решения задачи в нём. На третьей стадии ищется *решение* задачи в избранном расширении. Реализация этой схемы связана с возможными за-

[282] Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. *«Современная философия математики: недомогания и лечение»*. – Новосибирск: «Параллель», 2007, с. 19–20.

труднениями, но Ершов считает их преодолимыми. Он пишет о «*терапевтическом эффекте*» задачного подхода. «*Этот подход подчёркивает, что такие вещи, как существование или истина, не открываются, а так сказать, «автоматически» назначаются нами в ходе осмысления круга задач (целей, желаний), почему-либо выбираемых нами для предстоящих попыток их решить (достичь, удовлетворить)*»[283].

Ершов рассматривает доказательство как математическое понятие. Понимание строгости доказательства менялось с усложнением техники математических рассуждений, с увеличением точности математического языка и осознанием ориентирующих идеалов математической деятельности. Ершов считает, что первые определения понятия доказательства появились на рубеже XIX–XX вв., когда была создана математическая логика. В то время в математике упорядочивались факты и пересматривались основания: «*Тогда появилось понятие «множество», … <оно> оказалось тем единым понятием, в терминах которого можно было все остальные математические понятия сформулировать. И строилось то, что потом Пуанкаре назвал раем для математики, – «теория множеств». И за проникновение в рай, оказалось, нужно платить. Оказалось, что в тех, казалось бы, совсем новых основаниях построения математики как единого стройного здания обнаружились противоречия. И это был кризис в основаниях математики. Все серьёзные математики того времени: Анри Пуанкаре, Давид Гильберт, Герман Вейль и другие, были озабочены тем, чтобы как-то преодолеть эти противоречия.*

И в качестве противоядия, в качестве одного из средств, обеспечивающих беспроблемное развитие математики, явилось создание математической логики, которая позволила впервые

[283] Там же, с. 62.

дать точные математические определения, а, следовательно, и сделать объектом исследования такие понятия, которые в математике использовались, но использовались не как математические понятия, а именно: доказательство и алгоритм. …

В 1900-м году на Международном математическом конгрессе в Париже Давид Гильберт … выступил со списком проблем, которые, как он считал, в XX-ом веке в математике будут одними из самых важных. … Сам Гильберт сформулировал оптимистическое утверждение, что на все вопросы, которые математики могут задать, обязательно можно получить ответ. Но что это значило, это вопрос довольно сложный.

В частности, можно доказать, решить проблему, то есть привести доказательство, что эта проблема имеет положительное решение или отрицательное решение. Но можно задать и более хитрый вопрос. А может быть, нет доказательства ни того, ни другого? Но для того чтобы математически ответить на такой вопрос, нужно знать, что такое доказательство. И когда математическая логика предложила точное определение этому понятию, то получились результаты, которые до сих пор будоражат умы человеческие, а именно, что можно доказать, что нет доказательства того или иного утверждения. … Существует парадоксальное утверждение в теореме Гёделя, утверждение о том, что нечто нельзя доказать. … Я уже говорил, что математика стремится ко всё более точному изложению своего собственного предмета, и одно из достижений ещё древних греков было создание аксиоматического метода. Суть изложения геометрии по Евклиду … состоит в том, что геометрические истины начинаются с формулировок аксиом, а все остальные утверждения, леммы, теоремы, они вытекают из аксиом. Это было на самом деле интеллектуальным открытием. Я должен сказать, что появление аксиоматического метода произвело сильное впечатление на другие науки. И философы, биологи, физики, тоже попытались изложить так свои системы. Вот Спи-

ноза свои сочинения излагал в виде такого аксиоматического, систематического изложения. Но как показало дальнейшее развитие, там было два ну не то что бы изъяна, а две вещи, которые надлежало более серьёзно проанализировать и уточнить. Одно из них состояло в следующем. Вот есть аксиомы, все остальные истины должны получаться из них или доказываться из этих аксиом. А что такое доказательство? Если оно точно не сформулировано, то здесь остаётся элемент неопределённости. Как говорится, по согласию внутри математического сообщества кое-какие тексты принимались за доказательства, а другие не принимались. Т.е. математики осознавали, что такое доказательство, хотя иногда возникали и споры, но, тем не менее, этот элемент требовал уточнения.

И вот точная формулировка доказательства составляла, так сказать, следующий уровень точности для аксиоматического метода. И вторая вещь – это язык. Дело в том, что обыденный язык, он не просто двусмыслен, он многосмыслен. … Если говорить о контекстах, то там многозначность языка становится бесконечной. Но без этого поэзия была бы невозможна, если бы язык, на котором мы разговаривали, имел только один смысл. Но для математики, для науки, стремящейся к точности, это достоинство естественного языка является недостатком. Поэтому другая вещь, которая была нужна, – это создание достаточно богатых формальных языков. Дело в том, что математика довольно давно начала вводить элементы формального языка – различные обозначения, переменные, знаки для операций, знаки для того же радикала, и т.д. И многие имеют впечатления о математике как о формулах, вот формулы – это элементы формального языка. Но, тем не менее, если вы посмотрите даже современные математические журналы, то кроме формул там ещё и довольно большой текст. И математическая логика предложила такие формальные языки, которые включают не только оперативные элементы математики, но и всё содержание мате-

матическое может быть изложено на формальном языке. Этим достигался ещё один уровень точности. …

Сейчас говорят о влиянии компьютеров на нашу жизнь, это общее место. Понятно, что они завоёвывают всё большее и большее место в нашей жизни. Но если посмотреть, какие люди были у истоков создания первых компьютеров, то мы там увидим Норберта Винера, Алана Тьюринга, ещё ряд людей, я потом, может быть, их назову. Эти люди были математиками, которые начинали свою профессиональную деятельность в области математической логики. Норберт Винер был студентом Бертрана Рассела, известного английского философа, но он был и одним из создателей первых формальных систем. Алан Тьюринг тоже был профессиональным логиком. И я думаю, что это осознание, что формальные языки могут быть столь же богаты по выразительным возможностям, как и естественный язык, но точными, с точным и однозначным смыслом, – это позволило им предвидеть, что компьютер – это не есть просто большой арифмометр, а что он может стать, как говорится, интеллектуальным орудием. Так что опыт работы людей в математической логике привёл и к таким, я бы сказал, «сайд-эффектам», как создание компьютеров.

Ну а с точки зрения внутреннего развития, то я уже сказал, что можно считать, что математическая логика на две ступеньки подняла точность математического языка по сравнению с классическим аксиоматическим методом. Но история продолжается. И обнаружились и другие любопытные вещи. Мой учитель, академик Анатолий Иванович Мальцев сделал, на мой взгляд, два очень глубоких открытия. … Я уже объяснил, что математическая логика была создана как некоторое охранное предприятие. Охрана от противоречий. … Оказалось, что языки, в частности один из языков математической логики, так называемое «исчисление предикатов первой ступени», обладает некоторым мощным внутренним математическим свойством.

Анатолий Иванович Мальцев в 36 году доказал так называемую Теорему компактности. … А в 41 году Анатолий Иванович продемонстрировал, что только с помощью этого свойства языка можно доказать очень многие теоремы, которые уже в специализированных отделах математики доказывались – так называемые локальные теоремы, причём, разные теоремы разными способами. Они чем-то были похожи, но кроме ощущения того, что они похожи, ничего другого не было. Оказалось, что большинство из этих локальных теорем – это есть следствие одной Локальной теоремы. Что достаточно сформулировать на этом формальном языке соответствующее утверждение с некоторыми ограничениями, и тогда уже как следствие получаются те локальные теоремы. … Пойа написал книгу, которая у нас была переведена, «Как решать задачу?», она была издана в «Учпедгизе». И там, собственно, рассказывается некоторая эвристика и даются некоторые советы, как решать задачу, как анализировать и так далее. И там, в частности, описываются разные явления, которые при этом возникают. И одно из явлений называется «парадокс изобретателя». Там особенно про изобретателя не идёт речи, но суть состоит в следующем: иногда, решая задачу, полезно взглянуть на неё, может быть, сверху и рассмотреть более общую задачу. И при таком взгляде она становится проще. Я считаю, что открытие локальной теоремы и открытие способа её применения для доказательства серьёзных теорем, которые уже были известны и очень многих новых теорем, это был парадокс изобретателя.

Оказалось, что суть большинства этих локальных теорем – это свойство того формального языка, который используется. Ну, дальше – больше. Теорема компактности привела к созданию одного из наиболее развитых разделов математической логики – так называемой «теории моделей». И здесь прослеживается, на мой взгляд, довольно любопытная эволюция, которую я попытаюсь как-то объяснить. Я для себя использую деление «современ-

ная математика» и «классическая математика», достаточно понятное различие. … Классическая математика занималась очень ограниченным числом объектов – линия, плоскость, фигуры на плоскости, трехмерное пространство, далее непрерывные функции в трехмерном пространстве. Этим классическая математика занималась многие века. Современная математика началась, я думаю, с открытия Эвариста Галуа, который для решения классических вопросов о нахождении корней уравнения в радикалах, … предложил ввести некоторые новые вещи. Не те классические объекты, а автоморфизмы и конечные группы, и т.д. Для решения классических вопросов нужно было ввести новые сущности. И вот с этого, на мой взгляд, начинается современная математика.

Так вот, первые применения Локальной теоремы, которые Анатолий Иванович делал, касались современной математики. Они относились к теории групп, к теории алгебраических систем, к таким понятиям, которые характеризуют современную математику. Хрущовский применил методы математической логики для совершенно классического раздела математики – для теории чисел и алгебраической геометрии. Это такие, как бы, священные коровы, которым молятся. И оказалось, что даже для решения таких серьёзных, вернее, классических вопросов, методы теории моделей, математической логики, тоже применимы. …

Развитие всякой науки, в том числе и математики, сопровождается не только постановками задач и их решениями, но и развитием понятийного аппарата, введением понятий. Причём, введение правильных понятий на самом деле является очень существенным, и часто введение плодотворного понятия является столь продуктивным, что вызывает взрывную реакцию и проникновение понимания в существо вещей. Так вот, мне удалось применить математическую логику и её средства для того, чтобы ввести в обиход понятия, которые важны для классических теорий. Итак, Мальцев применил математическую логику *для современной математики, Хрущовский для решения вопросов классической математики, а я предложил некоторые понятия для классической математики, в том числе и для теории чисел. …*

Я уже упомянул о том, что создание математической логики послужило, в частности, важным элементом в развитии компьютеров, и там есть свои формальные языки – языки программирования, и т.д., и т.д. Эта линия тоже сама по себе развивается и весьма успешно, и там возникают очень интересные, в том числе математические вопросы. Так что математическая логика, ещё раз говорю, возникнув как некоторый охранительный механизм, неожиданно, на самом деле неожиданно, оказалась весьма и весьма мощным орудием, которое применимо практически во всех разделах математики. …

Полезно вернуться к теореме Гёделя о неполноте, о которой я говорил, что она волнует и философов, и, может быть, часть обычных людей. Есть такое представление, что она демонстрирует ограничения человеческого разума, и т.д., и т.д. Если на это взглянуть изнутри математики, то на самом деле там особых тайн нет, это очень похоже на такие парадоксы, уже не относящиеся к математике, как «парадокс лжеца», который демонстрирует следующее. Обычно люди считают, что каждое высказывание можно каким-то правдоподобным образом оценить, является оно истинным или ложным. … Один критянин говорит: «все критяне – лжецы». Что соответствовало исторической легенде, по крайней мере. Простодушная попытка оценить, истинно это высказывание или нет, показывает, что не всё так просто. Если он сказал правду, значит, он критянин и сказал правду. Хорошо, а если он обманул, тогда приходим к другому противоречию[284].

---

[284] Лектор в азарте ошибся. Обман критянина не ведёт к противоречию. Ведь отрицание фразы *«все критяне – лжецы»* означает, что *«некоторые критяне – честные люди»*. Наш кри-

И теорема Гёделя, во всяком случае, её доказательство, используя определённые находки, довольно любопытные технические находки, в некотором смысле моделирует этот парадокс. У Гильберта, которого я уже упоминал, была уверенность, что можно создать такую систему аксиом для всей математики, из которой будут следовать все математические утверждения. Это такая вера была. И он предложил программу формализации математики. А Гёдель, собственно, его опроверг. Он показал, что если аксиоматическая система достаточно богата, то в ней обязательно можно сформулировать утверждение, которое не может быть доказано, но которое будет верным»[285].

Ершов говорит, что только в XX в. сложились словарные и синтаксические стандарты математического доказательства. Признали, что ясный математический текст должен быть формализован – высказан на условном языке с небольшим количеством неизменных «слов», соединяемых согласно синтаксису из небольшого количества не допускающих исключений правил. В результате проверка формализованного текста требует лишь механического внимания. Но в неформализованном тексте могут быть ошибочные умозаключения, к которым может привести, например, злоупотребление интуицией или рассуждение по аналогии. Математики полагают неполную формализацию достаточной для строгого доказательства. Изложение доводится до состояния, когда есть содержательная определённость

тянин не относится к этим «некоторым» – так завершается мнимый «парадокс критянина». Древние греки заблуждались по этому поводу, ещё не разобравшись в отрицании всеобщности. Очевидно, имелся в виду настоящий семантический парадокс Евбулида – *«Я лгу»*. С «парадоксом критянина» его роднит «непредикативность» – самоотнесение понятий.

[285] Ершов Ю.Л. *«Доказательность в математике»*/ Программа Гордона, №268, 16.06.2003 (http://scircle.net/a-80)

слов, исполняются правила синтаксиса и не допускаются фактические ошибки. Аксиоматический метод позволяет составлять тексты, формализация которых потенциально достижима. Употребление аксиоматического метода является особенностью современной математики. Применение его к сложным математическим объектам позволяет разделить их свойства, собрав их вокруг немногих понятий. В современной математике также формализовано понятие алгоритма. Установлено, что с любым алгоритмом можно связать вычислимую функцию. Смысл вычислимости учреждает тезис Чёрча, сводящий эффективную вычислимость к общерекурсивности. Так Чёрч доказал алгоритмическую неразрешимость истинности в элементарной арифметике. Аналогично, алгоритмически неразрешима доказуемость утверждений в «чистой логике» – исчислении предикатов.

Современная математическая логика, по Ершову, способна решить все внутренние проблемы математики и философские проблемы её оснований. Предложенный им *«задачный подход»* является интересным обобщением его личного математического опыта. И в этом смысле творческие идеи Ершова дополняют методологические приёмы Гильберта и Гельфанда, а по существу напоминают интуиционистские результаты Колмогорова. Но вряд ли подход Ершова даёт метод решения всех математических проблем и застрахован от противоречий.

М.М. Арсланов о математических проблемах. Выдающийся российский логик *Марат Мирзаевич Арсланов* родился в 1944 г. в деревне Именьково Татарской АССР. Отец его был учителем татарского языка и литературы, а мать – крестьянкой. Поскольку сельская школа в Именьково была семилетней, для прохождения старших классов Арсланов поступил в национальную школу в Казани, живя вдали от семьи в комнате на чердаке школы. Он всегда любил учиться и привык заниматься самостоятельно по библиотечным книгам. Особенно ему нравилась математика. Арсланов пишет: *«К сожалению, я не принимал участия ни в каких математических соревнованиях и олимпиадах, которые, как я позднее узнал, в те годы достаточно часто проводились. Я просто не знал об их существовании и, что теперь мне кажется странным, мои учителя, по-видимому, о них также не знали, так как нам про эти соревнования ничего не говорили. Правда, своё будущее я тогда с математикой и не связывал, да и вообще, о том, куда я пойду после школы, кем стану во взрослой жизни, в первые два года учёбы в этой школе мало задумывался. Наверное, во мне жила некая подспудная уверенность в предопределённости своей будущей жизни, что всё само собой образуется так же легко и просто, как переход в конце учебного года от одного класса к следующему»*[286]. Надо отметить, что в то время Арсланов почти не знал русского языка. В 1961 г. он поступил на мехмат Казанского университета. Уже на первом курсе его научным руководителем стал завкафедрой алгебры, профессор Владимир Владимирович Морозов (1910–1975) – ученик замечательного казанского алгебраиста Николая Григорьевича Чеботарёва (1893–1947). Арсланов учился по индивидуальному плану, составленному Морозовым. В его программу вошли новейшие разделы общей алгебры и математической логики, по которым в КГУ ещё не было специалистов. На четвёртом курсе Арсланова направили на стажировку в Новосибирский университет под руководство акаде-

[286] Арсланов М.М. *«За стрелой времени. Записки казанского математика»*. – Казань: Издательство КГУ, 2014, с. 20.

мика Анатолия Ивановича Мальцева (1909–1967). Становление Арсланова как самостоятельного математика произошло в Новосибирске, на научных семинарах по математической логике, рекурсивным функциям и особенно – на семинаре по теории моделей академика АН Казахской ССР Асана Дабсовича Тайманова (1917–1990).

В 1966 г. Арсланов окончил мехмат КГУ и поступил в аспирантуру к Морозову. В 1970 г. он защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«О структуре рекурсивно перечислимых множеств»*, а в 1988 г. – докторскую диссертацию *«Полнота в арифметической иерархии и $\Delta^0{}_2$-множества»*. С 1989 г. он заведует кафедрой алгебры КГУ (с 2007 г. она называется кафедрой алгебры и математической логики). В 1990 г. Арсланов стал профессором. С 1993 г. он также заведовал отделом алгебры и математической логики НИИММ им. Н.Г. Чеботарёва. Арсланов подготовил 12 кандидатов наук и консультировал 3 докторантов. В 1995 г. его избрали членкором АН РТ. Арсланов работает в редколлегиях журналов *«Известия вузов. Математика»*, *«Lobachevski Journal of Mathematics»*, *«Asian – European Journal of Mathematics»*, *«Journal of Theoretical Computer Science»*, *«Mathematical Logic Quarterly»*.

Арсланов – крупный специалист в теории вычислимости. Он изучал алгебраическую структуру упорядочения тьюринговых степеней неразрешимости, исследовал иерархию вычислимых функций, создал методы описания полных в соответствующем уровне арифметической иерархии классов множеств. Ему принадлежит *«Теорема Арсланова о неподвижных точках»*. Он также решил ряд проблем в теории рекурсии.

Арсланов опубликовал более 100 научных работ и 5 монографий.

У Арсланова есть ряд наград. За книгу *«Рекурсивно перечислимые множества и степени неразрешимости»* он получил первую премию КГУ (1986). Он признан заслуженным деятелем науки РТ (1998), заслуженным работником высшей школы РФ (2007), заслуженным профессором Казанского университета (2010), имеет медаль *«За трудовую доблесть»* (2014).

Арсланов интересуется историей Казанского университета. Он исследовал вклад казанских математиков, – Н.И. Лобачевского, В.Г. Имшенецкого, А.В. Васильева, Д.М. Синцова, Н.Г. Чеботарёва, В.В. Морозова и др., – в развитие отечественной и мировой науки. «*Интересуюсь в основном историей математики в Казанском университете. А появился этот интерес совершенно случайно. Мы праздновали 200-летие университета. У нас ещё со времён Николая Ивановича Лобачевского сложилась традиция чтения торжественных лекций в актовом зале. Лобачевский как-то произнёс там речь о своей неевклидовой геометрии. С тех пор в день рождения Казанского университета кто-нибудь из профессоров выступает с актовой речью. Когда праздновали 200-летие университета, меня попросили прочитать такую речь. Я стал советоваться – на какую тему? Коллеги по работе мне посоветовали рассказать об истории развития математики в Казанском университете. Я подумал, – у меня на выступление отводится 50 минут, – об истории математики Казанского университета я рассказать не смогу. Слишком мало времени, чтобы рассказать о такой большой истории. Если что-то упустить – будет уже неполноценный рассказ. Я решил остановиться на развитии математической логики в Казанском университете. Это богатая история, – у нас был Платон Сергеевич Порецкий, Николай Александрович Васильев. Первая в России лекция по мате-*

матической логике была прочитана в стенах Казанского университета. После выступления меня упрекали, что надо было рассказать и обо всей истории математики Казанского университета. Я решил исправить эту ошибку и стал собирать материал, чтобы при удобном случае выступить на эту тему. Работой я увлёкся и обнаружил интересные моменты в истории математики Казанского университета. Было много талантливых учёных и конечно, – гениальный учёный Лобачевский, о котором знают как о создателе неевклидовой геометрии. А он был разносторонним учёным – у него были пионерские работы и в области алгебры, и математического анализа. Вначале я увлёкся исследованием его творчества, а потом обнаружил, что у нас были талантливые учёные – Александр Васильевич Васильев, Владимир Владимирович Морозов. Я обнаружил новые имена. Так, Пётр Сергеевич Назимов, – один из выдающихся учёных, воспитанник Николая Васильевича Бугаева, – имел очень хорошие работы по теории чисел. Ещё был молодой математик Владимир Павлович Максимович, не говоря уже о таких известных учёных, как Василий Григорьевич Имшенецкий. Я обнаружил, что за 200 лет Казанского университета в каждый исторический период длиной в 10–15 лет были математики первой величины, чьи работы имели мировое значение. Когда был юбилей нашего исследовательского института имени Чеботарёва, мне поручили выступить на эту тему. Я произнёс доклад, и потом целая глава вошла в мою книгу «За стрелой времени». Есть ещё моменты, которые мне хотелось бы выяснить. Мне хочется глубже исследовать творчество Назимова, Максимовича и других математиков того времени, и Николая Григорьевича Чеботарёва. Есть много задач, и я думаю, что буду работать в этом направлении. Вообще, история математики в России очень интересна»[287].

---

[287] Транскрипция видеозаписи *«Беседа о науке с профессором Маратом Мирзаевичем Арслановым. Казань, 5 июня 2014 года. Часть 2»* (http://youtu.be/XlcUixIXAw0)

Арсланов недавно опубликовал очень интересную книгу, где, в частности, рассказал о своём непростом пути в науку[288]. На его выбор направления исследований повлияли замечательные математики – В.В. Морозов и А.И. Мальцев. Но его тема была ещё несложившейся областью науки. Поэтому у Арсланова не было научного руководителя в стандартном понимании этого вопроса. Его проблемное поле было сформировано на многочисленных семинарах Новосибирского университета. «*Когда научный руководитель ставит какую-то задачу, он привязывает человека к этой тематике. А у меня была возможность выбирать те аспекты, те разделы математики, которые мне больше всего нравятся и которые, возможно, мне больше подходят. Мне просто повезло. Мои первые работы в области математической логики положили начало целому направлению в математике. … В Новосибирске были модны фундаментальные классы множеств теории вычислимости. Они были определены американским математиком Эмилем Постом. Была проблема Поста, которая была направлена на классификацию трудных, неразрешимых математически проблем. В программе Поста были определены фундаментальные классы множеств. Было модно в 60-х годах, когда я только начал заниматься наукой, эффективизировать определения этих классов. Здесь были: наименьший класс – класс простых множеств и наибольший класс – максимальных множеств, и несколько промежуточных. Для наименьшего класса и наибольшего класса максимальных множеств такая работа проводилась американскими математиками. И получалось так, что каждый раз эффективизация этих определений становилась такой, что для условий существования, присутствующих в этом определении классов, компьютер мог найти квантор существования. То есть, класс опреде-*

---

[288] Арсланов М.М. *«За стрелой времени. Записки казанского математика»*. – Казань: Издательство КГУ, 2014.

лялся так – существует то, что компьютер должен находить. Вот это и есть эффективизация. Но возможно, что компьютер не найдёт искомого, и нельзя составить программу для компьютера, чтобы он указал конкретно этот квантор существования. Тогда считается, что этот класс неэффективизируем. И каждый раз получалось, что эта эффективизация крайних классов приводит к подклассу наиболее трудному в алгоритмическом смысле. В смысле распознавания элементов проблема может быть лёгкой, если компьютер может распознавать элементы множества, – тогда множество называется разрешимым. А если не может – множество называется неразрешимым. Получалось, что если бы компьютер мог распознавать множества из наиболее трудного класса, то он смог бы распознавать и все другие множества. Наиболее трудный, – в смысле, – все остальные, в некотором точно определённом значении, к этому классу сводятся. Первые работы, которые я начал в Новосибирском университете – это попытка эффективизировать все остальные классы, и мне удалось это сделать. Для математики разрешимые классы не интересны, потому что, если класс разрешим, – вот компьютер, и он решает все проблемы для этого класса. Нас интересуют неразрешимые классы, даже среди неперечислимых.

Моя удача состояла в том, что я эффекитивизировал классы, которые были в промежутке между крайними – простыми и максимальными. … Я получил такие описания. Каждый подкласс, который выделяется, оказывается самым трудным. Естественно, возник вопрос – в процессе этой эффективизации каждый раз используются знаменитые теоремы Клини (теорема о рекурсии, теорема о неподвижной точке – это топологические понятия). Видимо, другие не задумывались – почему каждый раз приходится использовать теорему о неподвижной точке, чтобы получить конечный результат? Попытки сделать это, не прибегая к теореме о неподвижной точке, – не получались. Возникает вопрос: теорема о неподвижной точке формулируется только *для класса вычислимых функций (вычислимых на компьютере), а какие другие классы функций обладают неподвижными точками? Это была первая задача, которой я начал заниматься. Описать класс функций, которые обладают неподвижными точками, и попробовать охарактеризовать классы функций, которые не обладают неподвижными точками. В конечном итоге я получил решение этой задачи. Теперь существует такое понятие «критерий полноты Арсланова». Это результат, к которому я пришёл шаг за шагом в начале 70-х годов… Долго не публиковал (опубликовал в 1978 году), – не придавал особого значения этому результату, так как возникают более сложные математические проблемы. Можно представить себе бесконечную лестницу, которая разделена на ступени. На самой нижней ступени лежат все те проблемы, которые алгоритмически разрешимы, следующие – первый уровень алгоритмически неразрешимых проблем, например, там лежит проблема остановки машины Тьюринга (или проблема остановки любой программы на некотором универсальном языке программирования). Потом есть ещё следующие ступени, – так называемая арифметическая иерархия. Считается, что человеческий мозг может перерабатывать информацию, которая находится на первых четырёх–пяти ступенях этой иерархической лестницы. Есть книга Роджерса «Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость» – это одна из первых книг по теории вычислимости, которая была издана в США и переведена на русский язык. В этой книге пишется, что человеческий мозг способен перерабатывать информацию, которая находится на трёх–четырёх ступеньках этой лестницы. Предложение можно записать в виде формулы математической логики, используя некоторые специальные термины. Если это арифметика, там используется математические знаки сложения, умножения, меньше или равно. Если это теория множеств, то – отношение принадлежности. То есть, на языке математической логики, обогащённом специальными матема-*

тическими терминами, используя кванторы, пишется некоторое предложение. Потом по правилам математической логики это предложение можно записать в пренексной нормальной форме. Кванторы все выносятся вперёд, причём имеют значение альтернативные изменения кванторов. Если несколько кванторов существования находятся рядом – это можно считать за один квантор, и если несколько кванторов всеобщности находятся рядом – это тоже можно считать за один квантор. Сколько перемен кванторов – столько же и сложность предложения. Первый уровень – там единственный квантор существования или всеобщности. Следующий уровень – это перемена кванторов существует и «для каждого» или наоборот. Потом третий, четвёртый, пятый уровень – это и есть арифметическая иерархия. Она усложняется и в алгоритмическом смысле. Есть точное соответствие между этой синтаксической записью предложения и алгоритмической сложностью предложений. Каждую проблему можно положить на ступень этой лестницы. Если предложение с первых трёх–четырёх ступеней этой лестницы, то человек может перерабатывать информацию. На более высоких ступенях непосредственное восприятие предложений недоступно. Приходится использовать диагональные методы, результаты каких-нибудь заранее разработанных теорий и т.д. Мой критерий полноты был сформулирован для первого уровня. Поэтому я не публиковал своего результата. Меня интересовал второй – третий уровень. В конечном итоге проблема была решена, но понадобилось время»[289].

Арсланов предполагает, что развитие математики во многом стимулируется математическими проблемами: «*Хорошо поставленная математическая проблема, решение которой не удаётся найти, говорит о необходимости критиче-*

---

[289] Транскрипция видеозаписи «*Беседа о науке с профессором Маратом Мирзаевичем Арслановым. Казань, 5 июня 2014 года. Часть 1*» (http://youtu.be/-Obf-zUfeNA)

ского пересмотра существующих методов исследования, о недостаточности той совокупности знаний, к которой относится проблема. И, таким образом, способствует дальнейшему развития этой области науки»[290]. Из своего опыта он замечает, что *«в математике нужно выбирать те области, где ожидается хороший прорыв. … Надо ориентироваться на поставленные проблемы, например, институтом Клея. Там остаётся шесть нерешённых проблем. Целый коллектив достаточно долго подбирал эти задачи, это очень хорошо продуманные и поставленные задачи. Есть ещё проблемы, поставленные выдающимися учёными, такими как Смейл, а потом Гильберт – не все его проблемы решены. Хорошо бы работать в этом направлении, но здесь надо работать в коллективе или иметь такой гениальный ум, как у Григория Яковлевича Перельмана. … Очень интересна проблема Римана о дзета-функции. Это давнишняя проблема, может быть, появятся какие-нибудь молодые люди, которые будут способны решить и эти проблемы. Трудно надолго заглядывать вперёд. Сейчас всё очень быстро развивается. Сегодня заглядывать на 20 лет вперёд, то же что в Средние века было заглянуть на 500 лет вперёд. Думаю, что можно ожидать хороший прорыв в криптографии. Создание квантового компьютера и разработка глубоких квантовых алгоритмов. Если будет создан квантовый компьютер, криптография получит мощное развитие. Все методы, которые позволяют шифровать и дешифровать информацию, окажутся устаревшими, и уже сейчас разрабатываются алгоритмы, которые, учитывая возможности квантового компьютера, создают более надёжные алгоритмы в этом направлении. Пионерские работы, подобные сделанным в 30-е годы, … предсказать трудно. Неясно – где мы могли бы их ожидать. Возможно, будет сильный прорыв, но когда – трудно предсказать»*[291].

[290] Там же.
[291] Там же.

Активно работая в редколлегии ряда международных журналов, Арсланов имеет своё понимание экспертной функции: «*Трудно сразу сказать – хорошая работа или нет. Бывает, что сразу очевидно. Есть ощущение, что работа хорошая или пустяковая, что на рецензирование и не стоит отправлять. Но по преимуществу следует обращаться к специалисту. На рецензию отправляю, если думаю, что работу действительно следует опубликовать*»[292].

Профессор Арсланов работает очень систематично. С юности он ценит время и результативно делит его между научной и общественной нагрузкой. Со стороны представляется, что математика для него – обстоятельная игра (как нарды или го), каждый шаг которой заслуживает отдельного размышления, и успех в которой приносит интеллектуальная выносливость и строгое следование общепризнанным правилам.

Т.Н. Фоменко о развитии математики. Известный российский математик *Татьяна Николаевна Фоменко* (*Щёлокова*) родилась в 1948 г. в столице Киргизской ССР – Фрунзе. Отец её был армейским офицером, в 1967 г. демобилизовался в звании гвардии подполковника. Мать была ветеринарным врачом. Из-за службы отца семья часто переезжала – из Киргизии в Москву, затем в Приморье, в Алтайский край и в Смоленск. Татьяна Николаевна много раз меняла школы, но при этом всегда отлично училась. Она участвовала в школьных олимпиадах, занималась спортом, окончила музыкальную школу. В 1966 г. она с золотой медалью окончила десятилетку и поступила на Отделение математики матмеха Воронежского университета, который закончила в 1971 г. с красным дипломом. После

---

[292] Там же.

аспирантуры Татьяна Николаевна работала в НИИ математики при ВГУ. В 1977 г. она защитила кандидатскую диссертацию *«О некоторых топологических инвариантах эквивариантных отображений»*, её научным руководителем был завкафедрой алгебры и топологических методов анализа, профессор Юрий Григорьевич Борисович. После защиты в 1977 г. Татьяна Николаевна вышла замуж за Анатолия Тимофеевича Фоменко и с тех пор носит его фамилию. В 1978–1981 гг. Т.Н. Фоменко работала в Вычислительном Центре МГК Стройбанка СССР старшим инженером, затем – заведующей группой, моделировавшей краткосрочное кредитование строительства. В 1980–81 гг. она преподавала на подготовительных курсах МИСиС и вскоре перешла туда на постоянную работу. С 2005 г. Т.Н. Фоменко работает на кафедре общей математики ВМК МГУ. В 2010 г. она защитила докторскую диссертацию *«Топологические методы в теории неподвижных точек и совпадений»*. В 2012 г. она стала профессором кафедры ОМ ВМК. Научные интересы Т.Н. Фоменко лежат в области алгебраической топологии и математического моделирования сложных систем. Т.Н. Фоменко – автор около 100 научных статей и 5 математических монографий. Она известна своими работами по хронологии древности и является соавтором 5 книг по Новой Хронологии.

Мы говорили с Татьяной Николаевной об истории и методологии науки[293, 294]. Отметим, что в ряду науч-

---

[293] Видеозапись *«Беседа о жизни и науке с профессором Татьяной Николаевной Фоменко. Москва, 27 июня 2013 года»* (http://youtu.be/KUYoKJoteoM)

[294] Электронное письмо Т.Н. Фоменко от 3 сентября 2015 года А.Б. Верёвкину и Н.Г. Баранец (архив авторов).

ных дисциплин математике она отводит особое место: *«По-моему, это и в какой-то мере универсальный язык, применяемый в разных науках, и всё же отдельная наука (группа наук), происходящая из человеческой психологии, логики мышления и пространственно-временного осознания своего существования. Конечно, все эти моменты присутствуют в разной степени во всех науках, но в других науках есть ещё внешний предмет исследования: в биологии – живые организмы, растения, в химии – вещества, их взаимодействие, и т.п. В математике предметом исследования являются абстракции, сформировавшиеся под влиянием внешнего мира и самоощущения, специфические модели внешнего мира и его различных свойств, построенные на основании нашей внутренней природы, логики нашего сознания. Вообще, по-моему, здесь дать окончательную характеристику довольно сложно, так как математика развивается и проникает во все новые сферы познания. Ведь деление познания на науки довольно условно. Всё связано. И, кстати, эту связь помогает обеспечивать (в большой степени) именно математика»*[295].

Истинность в математике Т.Н. Фоменко понимает в логическом неопозитивистском значении, а о математическом доказательстве замечает: «*Строгость доказательства – что это такое? Когда мы говорим, что доказательство достаточно строгое? Наверное, когда сложные утверждения доведены с помощью логических умозаключений до некой совокупности простых истин. Однако всё это очень относительно и условно, основано на определённой договорённости. Существует некое дерево логических утверждений и их выводов, взятое за основу, некий фундамент математических знаний (основы геометрии, анализа, логики). На нём (на этом дереве) вырастают (точнее, выращиваются), так сказать, новые веточки и целые кустики. Так вот, если в статье или книге, начиная с*

---

[295] Там же.

такого нового росточка, аккуратно прослежен путь, доходящий до этого фундамента, то говорят, что соответствующее утверждение строго доказано.

Математическое творчество – это выращивание таких новых логических веточек и кустиков. Как оценить его? Во-первых, по истинности, т.е. по строгости доказательства. Во-вторых, по актуальности. Актуальность – весьма условный и субъективный показатель, означающий, на какой части фундамента выращена данная веточка, насколько она нужна, полезна для выращивания новых других веточек, а также ценна для применения в других областях. Здесь мнения разных специалистов часто расходятся. Красота математического творчества заключается не только в строгости доказательства, но и в выборе того логического пути, по которому оно строится. В краткости и оптимальности этого пути. Все перечисленные параметры оценки (кроме, может быть, строгости доказательства) весьма относительны и субъективны, большую роль во всём этом играет человеческий фактор. Поэтому абсолютно точных оценок не существует, в этом проблема. Существующие оценки всегда апеллируют к каким-то договорённостям данного коллектива математиков»[296].

Ранее Т.Н. Фоменко рассказала о своём выборе научной темы: «*Когда нас на втором курсе распределяли на специализацию по кафедрам, у меня было желание пойти или на функциональный анализ, или на топологические методы алгебры. Но окончательный выбор сделали за меня, поскольку я была в больнице с воспалением лёгких. Выбором занимался заместитель декана, который работал на кафедре топологических методов анализа, и он меня записал на свою кафедру. Я была ему благодарна, так как мне на втором курсе было трудно выбрать специализацию. Заведовал кафедрой, а потом стал моим научным руково-*

[296] Там же.

дителем замечательный человек – Юрий Григорьевич Борисович. Это был одухотворённый человек, очень увлечённый.

Он нас сразу же вовлёк в научные семинары. Семинары были очень интересные. Сам Борисович был увлечён математикой – мы интересовались новыми достижениями, разбирали свежие, только что выходившие работы московских и зарубежных математиков. Он доставал новые публикации, книги, и мы разбирали новые подходы к решению задач. На его семинарах была очень хорошая творческая атмосфера. Его увлечённость и нас стимулировала заниматься наукой.

Борисович предложил нам несколько задач. Одна из них предлагала обобщить работу по теории совпадений двух отображений, решить задачу – при каких условиях существует точка x, когда F(x) равна G(x). Это задача о совпадениях. Вначале это было несложно – надо было обобщить уже известную работу, но потом эта тематика меня привлекла. Дальше я тоже занималась ею – с разных сторон решала подобные задачи теории неподвижных точек и совпадений. …

Когда мы были аспирантами, – Николай Михайлович Близняков и Яков Аронович Израилевич и я, – Юрий Григорьевич Борисович привлёк нас к написанию учебника по топологии. Тогда в университетах ввели обязательный курс по топологии. Была разработана программа такого курса и возникла идея, следуя этой программе, написать нормальный учебник. Потому что приходилось пользоваться разными переводными книгами, подбирать материал, чтобы по этой программе сделать курс лекций. Мы с удовольствием откликнулись. Стали писать, и у нас получилась книга. Первое издание её было в 80-м году в издательстве «Высшая школа». Мы попросили Анатолия Тимофеевича Фоменко иллюстрировать нашу книгу. И он нарисовал иллюстрации к каждой главе. В 1995 году вышло её второе издание в издательстве «Наука», туда было добавлено довольно много нового материала. Я принимала участие в этом добавлении и все ри-

сунки внутри книги делала я. Книга получилась довольно популярная и имела хорошие отзывы»[297].

Для понимания сути математических проблем Т.Н. Фоменко считает важным развитие врождённых образных представлений: «*Мне кажется, очень важно, преподавая такие формальные дисциплины как дифференциальные уравнения, уметь их увязывать с геометрическим восприятием. Наглядное восприятие полезно, чтобы студенты писали не только формулы, но и понимали геометрические образы, которые возникают в теоремах, доказательствах и методах решения математических задач. … Чтобы лучше понять, чего ты хочешь, удобно бывает по возможности представить себе это как-то геометрически. Эта врожденная способность есть в какой-то мере у каждого человека, но наше наглядно-геометрическое воображение должно развиваться»*[298].

В экспертной деятельности Т.Н. Фоменко находит субъективные черты. «*Оценка математических работ в некоторой степени вещь субъективная, потому что в любой науке есть авторитеты. Хотя математика наука строгая, но выбор темы – какая более полезна или актуальна – решают научные руководители и руководители подразделений. И в этом смысле присутствует элемент субъективности. Если человек занимается какой-то определённой областью математики, ему это направление кажется самым полезным. Он его пропагандирует, а другие направления, которые для него далеки и не совсем понятны, кажутся неактуальными. Критерий качества математических работ – это истинность результатов, полученных в работе. Необходима выверенность и доказанность результатов. Важными критериями являются новизна и нетривиальность.*

---

[297] Транскрипция видеозаписи «*Беседа о жизни и науке с профессором Татьяной Николаевной Фоменко. Москва, 27 июня 2013 года*» (http://youtu.be/KUYoKJoteoM)
[298] Там же.

Очень ценится решение давно стоявших задач. И, конечно, – польза и ценность в прикладном направлении»[299].

Математический мир Т.Н. Фоменко похож на ухоженный сад. Чтобы его вырастить, требуется вложить труд и терпение. Но со временем он отблагодарит владельца за заботу своими плодами и подарит радость созерцания обустроенной природы.

В.А. Успенский об особенностях математического познания. Российский логик, лингвист и публицист *Владимир Андреевич Успенский* известен также и своими философскими работами. Он родился в Москве в 1930 г., окончил мехмат МГУ в 1952 г., под руководством А.Н. Колмогорова защитил кандидатскую диссертацию *«Вычислимые операции на рекурсивно перечислимых множествах»* (1955). В 1964 г. он стал доктором физ.-мат. наук, затем – профессором университета. Много лет Успенский преподавал математику студентам-гуманитариям. Он был соорганизатором Отделения теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ. С 1995 г. Успенский заведует кафедрой математической логики и теории алгоритмов мехмата МГУ.

В статье *«Семь размышлений на темы философии математики»* (1985) Успенский высказал оригинальные мысли о предмете математики и математическом доказательстве, которые позднее дополнил в статьях и интервью. Обсуждение особенностей математического знания Успенский начинает с опровержения исключительности математики, которая, по общему мнению, точно определяет понятия, строго доказывает теоремы исходя из чётко сформулированных аксиом, и поэтому

---

[299] Там же.

является наиболее тёмной наукой, недоступной обыденному пониманию. *«Определить все математические понятия невозможно. Одно определяется через другое, другое через третье и т.д.; где-то мы должны остановиться, … если только не допускать порочного круга, некоторые понятия должны остаться без определения. Спрашивается, как же могут быть усвоены эти понятия. Ответ: из непосредственного наблюдения, из опыта, из интуиции. Нет нужды напоминать, что формирование общих, абстрактных понятий в мозгу человека – сложный процесс, принадлежащий более психологии, нежели логике. Эти понятия, усваиваемые не из словесного определения, а из непосредственного личного опыта, естественно называть первичными понятиями, или категориями математики. К числу таких категорий относятся, например, понятия точки, прямой, множества, натурального числа»*[300]. Успенский советует открыть учебник *«геометрии А.П. Киселёва, или какой-нибудь втузовский учебник математического анализа, или университетский учебник теории чисел. Мы встречаем в этих учебниках доказываемые теоремы, но вряд ли (за исключением аксиомы о параллельных – она же пятый постулат Евклида) найдём какие-либо аксиомы. Дело обстоит несколько загадочным образом. В самом деле, если нет аксиом, то на основе чего происходят доказательства, скажем, теорем теории чисел? По-видимому, на основе здравого смысла и неких представлений об основных свойствах натуральных чисел. Каковые представления, хотя и одинаковые у всех людей, не сформулированы явно в виде списка аксиом»*[301]. Причины недоступности и непонятности математики Успенский видит в «*дурном воспитании к непониманию*» (благодаря которому обыватель не стремится

---

[300] Успенский В.А. *«Труды по нематематике. С приложением семиотических посланий А.Н. Колмогорова к автору и его друзьям. В 2-х томах. Том 1»*. – М.: ОГИ, 2002, с. 64–65.
[301] Там же, с. 67.

понять математику), и в нежелании математиков пояснять свою работу. От математиков требуется целенаправленно разъяснять и популяризировать математические знания. Пусть всегда останутся туманные для непрофессионалов тонкости, но это не должно останавливать прояснения общих идей. *«Подлинно глубокое математическое понятие или математическое утверждение должно быть в своей сути просто. А тогда есть надежда, что оно окажется понятным (или, лучше сказать, понятым): ведь к простому легче привыкнуть, а мы не знаем иного толкования для «понять», чем «привыкнуть»».*

Он разбирает суть математического доказательства: «*формальными доказательствами могут обладать (или не обладать) не сами содержательно понимаемые утверждения, а лишь их записи (т. е. опять-таки слова) в каком-либо точно заданном логико-математическом языке. … Всякое разумное математическое определение обычно претендует на то, чтобы соответствовать некоторым интуитивным представлениям, отражать их. Законность определения ещё не означает его разумности. Так, математическое понятие непрерывной кривой отражает (с той или иной точностью) наши интуитивные, содержательные представления о траектории движущейся точки. Аналогично понятие формального доказательства отражает интуитивные представления о содержательном доказательстве.*

Можно сказать, что понятие формального доказательства является математической моделью понятия доказательства – в том же смысле, в каком понятие непрерывной кривой является математической моделью понятия траектории. Остаётся выяснить, что же такое доказательство? … Понятие доказательства не принадлежит математике (ей принадлежит лишь его математическая модель – формальное доказательство). Оно принадлежит логике, лингвистике и больше всего – психологии. Итак, термин «доказательство» – один из самых главных в ма-

тематике – не имеет точного определения. А приблизительное его определение таково: доказательство – это убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других. Понятия, присутствующие в нашем определении доказательства – либо логико-лингвистические («рассуждение»), либо психологические («убеждающая сила», «готовность»). Это полностью отвечает сути дела: само представление о доказательстве неразрывно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человеческого общества. И то, и другое изменяется с ходом истории. Меняется языковое оформление доказательств. Меняется и представление об убедительности. Представление об убедительности зависит не только от эпохи, но и от социальной среды»[302].

Успенский отмечает переменчивость познавательных конвенций, касающихся убедительности доказательств. «*Представление об убедительности того или иного рассуждения зависит от многих факторов. Выявление этих факторов представляется важной задачей логики и психологии. В число таких факторов входит, например, разделение понятий (а точнее, терминов) на осмысленные и бессмысленные. Понятия флогистона и теплорода, считавшиеся осмысленными в XVIII в., признаются сейчас бессмысленными. Эйнштейн открыл, что бессмысленным является и понятие одновременности двух событий – если считать его объективным понятием, не зависящим от наблюдателя. … С другой стороны, такое «очевидно бессмысленное понятие», как бесконечно малое число, наполняется сейчас точным смыслом в рамках новой ветви математики – так называемого нестандартного анализа. С изменением представлений об осмысленности или бессмысленности понятий меняется и представление и о самой сущности научной истины. Меняется представление об очевидности. Как в своё*

---

302 Там же, с. 93–95.

время все знали, что гроза вызывается высшими силами, так теперь все знают, что причина грозы – в атмосферном электричестве. …

То, что человеческое знание меняется с ходом истории – разумеется, общее место. Здесь хотелось бы подчеркнуть, что в состав знания входят не только сами факты, но и исходные предпосылки, презумпции, на основе которых тот или иной факт делается членом системы знаний: представления об осмысленности и бессмысленности, об очевидности и неочевидности, о возможном и невозможном, о частном и общем, об убедительности и неубедительности, о доказанном и недоказанном, о достоверном и недостоверном. Все эти представления, хотя, возможно, и меняющиеся более медленно, чем простые представления о фактах, в сущности, так же исторически относительны, как и последние.

Математика иногда воспринимается как скала, неподвижно возвышающаяся над волнами переменчивых представлений, относящихся к другим наукам. Конечно, основания для такого взгляда на математику имеются. Тем не менее, представление о некоей абсолютности математики, видимо, преувеличено»[303].

Современная математика очень сложна. Доказательства иных теорем настолько велики, что помимо специальных знаний для их проверки требуется большое время и терпение. Кроме того, в доказательстве разрешается использовать готовые утверждения, уже не требующие доказательства. Это вносит субъективный релятивистский момент в возможность оценки рассуждения. Запрет ссылок на ранее доказанные положения и применение только первичных определений приведёт к «раздуванию» текстов, ещё более затруднив задачу оценки. Откуда у математика берётся мнение,

---

[303] Там же, с. 96.

что утверждение, доказательство которого он не знает (и возможно никогда не узнает), доказано? Успенский считает, что оно опирается на доверие. Доказательства из явлений индивидуального опыта переходят в явления опыта коллективного: «*Сейчас каждый вынужден, так или иначе, использовать знания других. Аналогично обстоит дело и с доказательствами: деятельность в сфере производства и потребления доказательств стала в такой же степени объектом разделения и кооперации, как и деятельность в сфере производства и потребления знаний. Само понятие убедительности начинает терять свой индивидуализированный оттенок и всё больше приобретает характер «коллективной убедительности». По-видимому, следует постепенно приучаться говорить об убедительности не для отдельного индивидуума, а для некоторого научного коллектива. При этом коллективная убедительность отнюдь не означает равную «непосредственную убедительность» для каждого в отдельности члена коллектива. Коллектив выступает не как простая сумма членов, а как единое целое. Смысл коллективной убедительности в том, что для каждой составной части доказательства найдётся свой «отвечающий за неё» член коллектива, для которого непосредственно убедительна именно эта часть (а другие члены коллектива полагаются в данном вопросе на этого члена)*»[304].

С развитием математики и появлением сложных доказательств теряется их прозрачность: «*Конечно, формальное доказательство объективно. Но, во-первых, формальными доказательствами обладают не сами суждения, а их выражения, записи в формализованных языках. Во-вторых, проверка утверждения, что данный текст является формальным доказательством, хотя и осуществляется алгоритмически, может, при объёмистом тексте, вызвать значительные практические*

[304] Там же, с. 102.

трудности. Большие доказательства начинают жить по каким-то своим, макроскопическим законам»[305]. Возникает градация доказательств по степени их убедительности.

Различая способы получения знания у гуманитариев и математиков, Успенский усматривает их взаимную дополнительность: «*Потребуются ли когда-нибудь, скажем, историку аксиоматический метод или бесконечные множества? Более чем сомнительно. Но вот строгость мышления и воображение не помешают и ему. С другой стороны, и математику есть чему поучиться у гуманитария. Последний более толерантен к чужому мнению, чем математик*[306]*, и это говорится здесь в пользу гуманитария…*»[307].

Успенский предполагает, что математическая социализация деформирует коммуникативные и когнитивные качества: «*Математики, которых специально обучают обращению с абстракциями, начинают мыслить отчасти по-особому. … Математики пользуются точной терминологией, а в качестве терминов нередко используют слова обычного языка, придавая им совершенно новый смысл. Математики настолько привыкли к свободному заимствованию общеупотре-*

---

[305] Там же, с. 106.

[306] Мы полагаем, что это благодушие мало обосновано. Гуманитарные науки по своей природе служат групповым интересам вернее, чем математика. Толерантность же, т.е. терпимость к чуждому образу мысли, является плодом безразличия к предмету возможного несогласия. Когда на кону оказываются ключевые ценности, толерантность заканчивается. И это не результат гуманитарного или негуманитарного воспитания, а вопрос выживания (научной) группы. Здесь можно не упоминать давние острые баталии по гуманитарным поводам, обратившись к свежим примерам. Укажем демонстративно нетерпимое отношение академических гуманитариев (с которыми полностью солидаризуется В.А. Успенский) к хронологическим исследованиям академика А.Т. Фоменко.

[307] Успенский В.А. *«Математическое и гуманитарное: преодоление барьера»*. – М.: МЦНМО, 2011, с. 10.

бительных слов для использования в качестве сугубо математических терминов, что бывают склонны искать особый, «математический» смысл в самых обычных словах. … Математический смысл слова, заимствованного из естественного языка, близок к обычному смыслу этого слова, но не совпадает с этим обычным смыслом. Этот фактор более глубок и заключается, по-видимому, в том, что занятия математикой и сопряжённое с ними систематическое использование точной терминологии приводят к изменениям психологии – по крайней мере, в части восприятия слов…»[308].

Математика воспитывает дисциплину мышления, приучает твёрдо различать истину и ложь, доказанное и гипотетическое. Успенский пишет: *«Истина – основной предмет математики»*. Он поясняет сущность логической истинности: *«во-первых, и аксиомы, и утверждения … представляют собой так называемые «формулы», т.е. просто комбинации знаков, или букв, образованные согласно некоторым принятым «правилам образования», … во-вторых, сами понятия «утверждение» и «отрицание утверждения» определены также совершенно формально как комбинации знаков, имеющие определённое строение (без ссылки на то, что эти комбинации на самом деле что-то утверждают или отрицают), … в-третьих, правила вывода формулируются чисто комбинаторно в виде разрешённых преобразований одних цепочек знаков в другие. … Вся теория имеет, следовательно, чисто комбинаторный характер, нигде не происходит апелляции к смыслу рассматриваемых знаков и знакосочетаний (такая апелляция, разумеется, играет решающую роль при выборе тех или иных аксиом, правил преобразования и т.п., но её нет в окончательных формулировках). … Предположим теперь, что рассматриваемым знакам и их разрешённым комбинациям придан некоторый смысл, так*

[308] Там же, с. 20.

что каждое утверждение … оказывается истинным или ложным, причём отрицание истинного утверждения оказывается ложным и наоборот (мы предполагаем, что отрицание утверждения также является утверждением). … Приписывание смысла цепочкам знаков … имеет содержательную ценность, лишь если оно происходит не произвольно, а неким естественным образом. Эта «естественность» предполагает, что истинность или ложность некоторых простейших цепочек задана заранее, … а истинность или ложность более сложных цепочек определяется через истинность или ложность более простых. … Сама возможность естественного приписывания истинного или ложного значения всем формулам, формально опознаваемым как утверждения (так называемым «формулам без свободных переменных»), далеко не всегда представляется бесспорной. … Однако в целом ряде важных случаев, например, в применении к утверждениям элементарной арифметики, истинность или ложность имеет очевидный (с наивной точки зрения) смысл»[309].

Такое формальное определение моделирует математическую истину и вряд ли может зажечь искру познания в душе исследователя. В повседневных оценках математики держатся иных критериев. Позиция Успенского отражена в его суждениях о геометрии: *«Казалось бы, ясно: истинна – значит, соответствует реальному положению вещей. Как там, в реальном мире, – одна параллельная прямая или много? А никак, потому что в реальном мире вообще нет прямых – как нет и других объектов геометрии. Геометрических шаров, например, в природе не бывает, а бывают лишь предметы, приближающиеся по форме к геометрическому шару; при этом арбуз в меньшей степени шар, чем волейбольный мяч, а мяч – в меньшей степени шар, чем биллиардный*

[309] Успенский В.А. *«Теорема Гёделя о неполноте в элементарном изложении»*// Успехи математических наук, 1974, т. 29, №1(175), с. 7–8.

шар или подшипник. С прямыми дело обстоит ещё сложнее: ведь прямая бесконечна, а все примеры, которые мы можем предъявить, будь то линия, начерченная на песке или бумаге, или натянутая нить, или граница между стеной и потолком – все они демонстрируют нам (опять-таки, разумеется, приблизительно) лишь ограниченные, конечные участки прямых линий, то есть то, что на языке современной геометрии называется отрезками. Да даже и отрезков в точном геометрическом смысле в природе не существует: самая тонкая нить имеет толщину, самая отшлифованная поверхность лишь приближается к идеальной форме, а под электронным микроскопом выглядит как рябь. Луч света – и тот искривляется в реальном пространстве. Для возникновения же представления о бесконечной прямой одного только наглядного способа недостаточно – требуется ещё и воображение. От зарождения геометрии прошли тысячелетия, пока люди осознали, что мы не можем непосредственно наблюдать точки, прямые, отрезки, плоскости, углы, шары и прочие геометрические объекты, и потому предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, населённый этими идеальными геометрическими объектами и который всего лишь похож на мир реальный (по терминологии некоторых философских школ, является отражением реального мира).

“Поверхности, линии, точки, как их определяет Геометрия, существуют только в нашем воображении”, – писал в 1835 году Лобачевский во вступлении к своему сочинению “Новые начала геометрии с полной теорией параллельных”. Аксиомы геометрии как раз и уточняют свойства этих существующих в нашем воображении понятий. Значит ли это, что мы можем написать какие угодно аксиомы? Нет, если мы хотим, чтобы геометрические понятия отражали наши представления о реальном физическом пространстве. Потому что хотя точки, прямые, поверхности не существуют реально, некие физические объекты и явления, приводящие к этим понятиям, безусловно

существуют (если вообще признавать реальное существование окружающего нас мира). Поэтому вопрос надо ставить так: какая из аксиом, Евклида или Лобачевского, точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах? Строгий ответ на это вопрос таков: неизвестно. Однако можно с уверенностью утверждать, что в доступных нашему наблюдению областях пространства евклидова геометрия соблюдается с высокой степенью точности. Так что когда мы говорим о неизвестности, мы имеем в виду очень большие области пространства. Дело в том, что в геометрии Лобачевского отличие суммы углов треугольника от 180 градусов тем больше, чем длиннее стороны этого треугольника; поэтому, чем больше треугольник, тем больше надежды заметить это отличие – и тем самым подтвердить на практике аксиому Лобачевского. Отсюда возникает мысль измерять треугольники с вершинами в звёздах (упомянутый выше Швейкарт употреблял для геометрии, впоследствии предложенной Лобачевским, название звёздная геометрия). Такими измерениями занимался сам Лобачевский ("И он вгляделся пристальней в безоблачную высь…"), но точность измерительных приборов оказалась недостаточной, чтобы уловить отклонение суммы углов треугольника от суммы двух прямых углов, даже если таковое отклонение и существует»[310].

Успенский отмечает больший демократизм математического сообщества, равно признающего верные доказательства и академика, и школьника. А в гуманитарных науках при оценке идей главную роль играет профессиональный авторитет. Успенский упоминает случай с Колмогоровым, который взял в ученики студента, нашедшего ошибку в его доказательстве. Но

---

[310] Успенский В.А. *«Что такое аксиоматический метод?»/ «Апология математики, или о математике как части духовной культуры».* – М.: Амфора, 2012, с. 53.

с его выводом трудно согласиться[311]. Пример из жизни Колмогорова отражает его бескорыстие на вершине безусловной научной славы. В повседневности математики (наряду с прочими учёными) воспринимают критику с меньшим удовлетворением. Экспертизы редакций математических журналов и комиссий также обращают внимание на математический статус соискателей, и все работы рассматривается с учётом этого фактора. История Галуа может послужить здесь одним из примеров[312]. Не всякое верное доказательство сразу публикуется в математическом журнале и заслушивается на научном семинаре. Зелёную волну получают лишь заслуженные авторы – меритократы от математики, по обозначению Гротендика. И это присуще любому дисциплинарному сообществу. Заработанный авторитет позволяет учёному независимо развивать своё направление. И поэтому ради престижа некоторые не

---

[311] Парадоксальным образом эта идея В.А. Успенского созвучна суровым словам его оппонента, математика Г.В. Носовского в интервью 20 марта 2015 г.: *«К сожалению, у нас естественные и гуманитарные науки обозначаются одним и тем же словом – «наука», хотя это принципиально различные виды деятельности. В естественных науках главный метод – доказательство. В гуманитарных «науках» главный метод – ссылка на авторитет. В этом смысле англоязычная терминология более правильна: там слово science обозначает только естественные науки. А гуманитарные обозначает слово speculation (спекуляция, но не в ругательном смысле). В русском же языке нет доброжелательного слова, которое могло бы обозначать именно гуманитарные науки – спекуляция, трепология, бредистика (определение гуманитарных наук по Стеклову) – все это несёт в себе резко отрицательный оттенок. Поэтому приходится называть их «наукой». Но неправильно это»*.

[312] Другой пример подал Кеплер в письме Галилею 1610 г.: *«Вероятно, может показаться, что я слишком поспешно принимаю Ваши утверждения. Но почему бы мне и не поверить самому учёному из математиков, сам стиль коего служит рекомендацией основательности его суждений?»*

жалеют сил. Надеяться на объективную оценку вклада учёного без учёта его заслуг, значит простодушно рассчитывать на альтруизм высокостатусных коллег, которые пожертвуют своими ресурсами ради утопических идей. Гуманитарии и математики являются жителями одной планеты, и научные группы страдают болезнями всего человечества.

Тем не менее, Успенский указал видимое различие математического и гуманитарного сообществ. Но причина здесь не в демократичности или её отсутствии, а в разной методологии дисциплин. В удалённых от непосредственного контакта с природой гуманитарных науках преобладает конвенциальное и конвергентное отношение к истине. Но математика нуждается и в иных критериях, более приближающихся к объективности – логической обоснованности, проверяемости, полезности. Однако из-за значительного роста математического сообщества в сравнении с 1930–40 гг. стремительно увеличилось количество математических работ, что усложнило их содержательную оценку. Математики попали в ту же ловушку *«большой науки»*, что и прочие дисциплинарные сообщества.

Можно предсказать, что научно-технический кризис «перепроизводства» будет преодолён на пути глубокой кибернетизации общества и математизации науки. Но профессор Успенский вряд ли симпатизирует этой сциентистской программе. Позиция его выглядит двойственной. Ведь он является успешным наследником логической и кибернетической школы Колмогорова и приложил немало усилий для внедрения математики в филологию. Но по общенаучной методологии Успенский тяготеет к гуманитариям, с которыми связан обширными родственными и дружескими связями. Без преувеличения его можно считать самым гуманитарным из известных российских математиков. Владимир Андреевич Успенский – автор спорного девиза: *«Математика – это гуманитарная наука»*.

В.Н. Латышев о выборе направления математических исследований. *Виктор Николаевич Латышев* – один из ведущих российских алгебраистов, заслуженный профессор и завкафедрой Высшей алгебры мехмата МГУ. Ему принадлежат важные результаты в теории ассоциативных и лиевых алгебр с полиномиальными тождествами, в теории алгебраической симплификации и стандартных базисов, в алгоритмических проблемах алгебры. В алгебраических кругах Латышев знаменит своим тонким пониманием ключевых затруднений алгебраических теорий и – в связи с этим – постановкой ряда интересных и сложных проблем. Немногие математики знают, что именно он в 1968 г. сформулировал важную *«проблему Шпехта»*[313]. И он же поставил до сих пор нерешённую *«проблему Латышева»*[314].

---

[313] Проблема конечной порождаемости полиномиальных тождеств ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики уже полвека направляет развитие теории PI-алгебр. В классической постановке она решена А.Р. Кемером в 1986 г. Но не решена сходная задача в положительной характеристике (здесь некоторые контрпримеры предложены А.Я. Канелем-Беловым, А.В. Гришиным и др.) и в неассоциативном случае.

[314] О существовании ассоциативного конечно-определённого ниль-кольца, не являющегося нильпотентным. Задача родилась после неожиданного результата И.Р. Шафаревича и Е.С. Голода. В 1963 г. при исследовании классического арифметического вопроса, используя гомологические методы, они построили ненильпотентную конечнопорождённую ниль-алгебру. Не раз объявлялись решения *«проблемы Латышева»*, но всегда отсутствовали хорошие публикации об этом и какие-то новые идеи, обеспечивающие продвижение в теме.

Виктор Николаевич Латышев родился в 1934 г. в Москве, в 1953 г. окончил школу с золотой медалью и поступил на мехмат МГУ, который окончил в 1958 г. С 1961 г. он работает на кафедре Высшей алгебры мехмата МГУ. Латышев стажировался в Новосибирске, где в 1963 г. защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«Об алгебрах с тождественными соотношениями»* под научным руководством А.И. Ширшова. В 1978 г. он защитил докторскую диссертацию *«Нематричные многообразия ассоциативных алгебр»* и стал профессором кафедры Высшей алгебры, которую возглавляет с 2000 г.

В 1989–91 гг. Латышев руководил созданной им кафедрой Алгебро-геометрических вычислений филиала МГУ в Ульяновске и был первым проректором филиала, который позднее стал Ульяновским государственным университетом. Нам посчастливилось знать Виктора Николаевича. Мы разместили несколько видеозаписей с ним[315].

Латышев рассказал о своих первых годах на мехмате: *«Я поступил на механико-математический факультет МГУ в 1953 году. Моё поколение первое, которое поступило в здание МГУ на Ленинских Горах. … Когда я пришёл на мехмат, весь коллектив способствовал созданию замечательной атмосферы преданности науки и огромного познавательного интереса. Моё поколение счастливо тем, что, как мне кажется, в то время формировалась современная математика. Если сравнивать с какими-то другими историческими периодами, в то вре-*

---

[315] *«В.Н. Латышев рассказывает об университетской математике. 30 мая 2013 г.»* (http://youtu.be/T-s4hj3cDOE); *«В.Н. Латышев вспоминает об Андрее Андреевиче Маркове-младшем. 20 июня 2013 г.»* (http://youtu.be/gVDveFNuNVU); *«Доклад В.Н. Латышева о симплификации и криптографии. 3 июня 2014 г.»* (http://youtu.be/OT4c9wTbUhE).

мя на мехмате работала могучая кучка математиков. Это – Колмогоров, Петровский, Александров, Курош, Шафаревич, Постников. … Наше поколение во многом формировалось под влиянием этих людей. Они умели формировать интерес к науке, и память о них живёт до сих пор. Все наши стереотипы отношений сложились под их влиянием. И неслучайно многие из нашего поколения и курса работают на факультете. Это было исключительное время, которое вряд ли повторится.

Моим учителем был Анатолий Илларионович Ширшов – совершенно замечательный человек и учёный, он весьма известен в математических кругах как выдающийся комбинаторщик. Он воспитал многих известных алгебраистов. … В жизни он был человек особый – талантливый руководитель. Он никогда не шумел – его не было заметно. 15 лет он был заместителем академика Соболева в Новосибирске, вёл всю организационную работу института, был очень скромен. … Ширшов любил школу и регулярно печатался в «Кванте», любил научную фантастику и стихи – особенно Есенина. Я счастлив, что встретил Ширшова в своей жизни. …

Анатолий Илларионович никогда плотно не опекал воспитанников и не был диктатором в выборе темы исследования. Но он незаметно представлял на выбор некий спектр проблем, говоря – вот это интересный вопрос. Когда я увидел исследования, связанные с полиномиальными тождествами, они привлекли моё внимание тем, что я не очень-то любил чисто аксиоматические проблемы, где встречается много континуальных объектов или мощности выше континуальной. А эта тема мне показалась очень арифметической. Это некоммутативная алгебра, связанная с матрицами. … Итак, я сам погрузился в предмет исследования. Потом Анатолий Илларионович со мной беседовал, я стал говорить с некоторыми из его учеников. Так незаметно для меня он, возможно, и определил мою тему. Потом я немного уходил от неё, менял направления исследований, но это фундамен-

тальное комбинаторное начало Анатолий Илларионович сумел во мне заложить. У него было своеобразное отношение с учениками, которое мне очень импонировало»[316].

Латышев рассказал о научных семинарах кафедры Высшей алгебры: *«Наша кафедра родилась в 1930 году. Основателем её был Отто Юльевич Шмидт, который занимался конечными группами. Потом он увлёкся космогонической теорией. … Сначала функционировал семинар, который возглавлял Шмидт, а все организационные вопросы вёл Александр Геннадьевич Курош. Первые заседания семинара проходили на улице Грановского на квартире Шмидта. Там было всего лишь семь человек – Скорняков, Головин, Курош, сам Шмидт и ещё три человека. … Этот научно-исследовательский семинар работает и до сих пор.*

Мехмат отличается сетью спецсеминаров и спецкурсов, охватывающих огромный спектр научных исследований. … Кроме этого основного семинара у нас возникло другое направление – группы Ли и однородные пространства. Ведущим специалистом здесь был Дынкин, а потом – Винберг.

Работал Игорь Ростиславович Шафаревич, который воспитал моего друга по учёбе – мы и ныне дружим – Евгения Соломоновича Голода. Тема Шафаревича – это некоммутативная алгебра и алгебраическая геометрия, и поэтому у нас возникло и это направление.

Очень скоро у нас возникло много в какой-то степени равноценных семинаров с чётким кругом задач и направлений исследования. … В самое последнее время у нас возникло направление, которое в современной математике называется «тропической линейной алгеброй». Первая конференция, которая была посвя-

[316] Транскрипция видеозаписи *«Виктор Николаевич Латышев рассказывает об университетской математике. Ульяновск, 30 мая 2013 года»*. (http://youtu.be/T-s4hj3cDOE)

щена этому направлению, проходила в субтропиках, и западные математики это направление так и назвали»[317].

Виктор Николаевич вспомнил историю об Израиле Моисеевиче Гельфанде и его семинаре: *«Он был полный диктатор. Авторитет его был неимоверен, он был жёсткий. Начался семинар. Опоздав, пришёл кто-то из известных математиков. Гельфанд говорит: «Вы опоздали на 20 минут. Это очень плохо. Начнём сначала, стирайте». Стёрли. Начали сначала. Потом возникла дискуссия. Израиль Моисеевич говорит: «Вот, непонятно – для кого пишутся математические книги? Мне кажется, что математики их практически не читают. И вообще – нет математика, который прочёл бы какую-то математическую книгу. Георгий Евгеньевич [Шилов], вы прочли в жизни какую-нибудь математическую книгу?» – «Нет, Израиль Моисеевич, не прочёл». И так он поспрашивал других. После этого мы установили, что книги пишутся математиками не для того, чтобы их читали. И нет математика, который прочёл бы математическую книгу.*

После этого я приступил к своему докладу об универсальных обёртывающих алгебрах. Прочёл я этот доклад – были вопросы. Идея Израиля Моисеевича была вот в чём – что это хорошо связывается с телами, ведь каждая из них имеет тело частных, и тогда мы выходим в другую область, не связанную с представлениями, и, может быть, на языке тел частных мы сможем, в том числе, вторгнуться в эту сферу. Там был Кириллов. После того как я сделал доклад, они к сожалению открыли, что универсальные обёртывающие алгебры могут быть очень далеки друг от друга, а их тела частных могут быть изоморфны. Постигло разочарование, но на этом пути появилось понятие, которое популярно до сих пор – «размерность Гельфанда-Кириллова»»[318].

---

[317] Там же.
[318] Там же.

Латышев размышлял о творческом долголетии математиков и о путях решения проблем. «*Мне кажется, что серьёзный результат получается на этой основе – спонтанно. Трудно сказать, что к мысли ведёт. Как говорит Сергей Петрович Новиков, когда проигрываешь проблему на компьютере, ничего к тебе не придёт. Всё надо от руки посчитать и выстроить, и вот тогда в момент просчёта возникает идея, – или ночью, – что ты обнаружил некую закономерность. Такие находки приходят, может быть, один раз в жизни.*

Наше поколение было склонно к анализу научного творчества. Мы пытались у наших учителей узнать – как сформулировать ту сущность, которую они как математики раскручивали. Если взять самого яркого математика – Андрея Николаевича Колмогорова, то у него его теория меры в той или иной форме повторялась всю жизнь, хотя он был многогранен. Как замечал Анатолий Илларионович Ширшов: «Главной оказалась моя теорема о высоте. Когда я её получил, я сомневался её печатать, а оказалась, что она – моя визитная карточка». Можно говорить о творческом долголетии. В разных областях науки оно разное. Математики и теоретические физики довольно быстро заканчивают активную теоретическую деятельность. Чтобы решить проблему, надо себя вогнать в состояние, которое очень близко к сдвигу умственных способностей. В этом состоянии получается решение проблемы. Если человек молод, он довольно быстро возвращается в нормальное состояние. С возрастом чувствуется, что войти в это состояние ещё можно, но вернуться может быть проблематично. Ольга Арсеньевна Олейник говорила, что на её памяти одна проблема по дифференциальным уравнениям была решена в 49 лет. Александр Васильевич Михалёв говорит, что Николай Владимирович Ефимов получил решение проблемы в 58 лет. Но я близко его знал. Он получил инфаркт, когда писал книгу. Когда ложился спать, страницы книги бежали перед его глазами. А свою проблему он довёл до решения в начале

40-х годов и ждал, когда нужная лемма появится. И когда у одного западного математика эта лемма появилась – он сказал, что его проблема решена»[319].

Виктор Николаевич задумывался о том, что и как в математике может быть решено и сводима ли математика к алгоритмам. *«Юрий Иванович Манин давно стал интересоваться алгоритмами. И мне кажется, он придумал хороший тезис. Я не вижу, – если руководствоваться той системой аксиом, которой мы генетически пользуемся – Цермело-Френкеля, что он выводиться из остальных тезисов. Тезис такой – вот у вас некоторое множество символов задаётся исчислением. То есть, имеется конечное значение начальных символов и правила построения выражений из этих символов. Он сформулировал: если система символьных выражений задана исчислением, то она перечислима. Всегда существует эффективная нумерация этих выражений. Вот это он постулировал. Он сказал, что этим соображением стоит дополнить тезис Чёрча.*

Но как-то дальше я не видел, чтобы кто-то из математиков этим заинтересовался, а я в спецкурсе этот тезис использую – он удобен. Правильный перечислительный процесс будет виден всегда, какое бы исчисление мы не изобрели. Например, множество функций Чёрча, определённых на всём натуральном ряде исчислением не задаётся – оно неперечислимо, а всё, что исчислением задаётся – перечислимо. В частности, все функции Чёрча перечислимы, то есть алгоритмы перечислимы, другое дело – нет алгоритма, чтобы распознать – два алгоритма задают одну и ту же функцию или нет. Это уже следующий вопрос, а сами алгоритмы они перечислимы, потому что это суперпозиция. Они строятся с помощью исчисления, и, значит, перечислимы. Специалисты по логике не вознесли Юрия Ивановича в тот же ранг, что и Чёрча, но мне кажется – это значимое высказывание,

[319] Там же.

которое, однако же, логиками почему-то не выделяется. … С точки зрения современных модернистов-математиков, вообще, нельзя иметь дело с бесконечным множеством, которое мы мыслим одномоментно заданным. Вот, например, натуральный ряд, как фундаментальный математик мыслит, приведёт к противоречию. Надо мыслить, что чисел неограниченно много. По существу, надо заниматься конечными множествами. А если мы говорим о задачах, мы не ограничиваем себя в вовлечении этих конечных множеств, число можно добавить. Мыслить бесконечные множества заданными одномоментно – опасно»[320].

Рассуждения Латышева о математической истине и доказательстве близки к интуитивизму и конструктивизму. *«Что значит доказывать? Сергей Петрович Новиков меня спросил: «Ты в какой системе аксиом мыслишь?» – Я ответил, что не задавался этим вопросом. – «Значит, в аксиоматике Цермело-Френкеля». Мы генетически, интуитивно всегда будем использовать способ доказательства выводом из одного – другого. Истина для нас такова: с помощью аксиом Цермело-Френкеля выводим из одного другое. Это и есть математическая истина. И тут алгоритм, не алгоритм, здесь всё это просто смысла не имеет. А что такое алгоритм? Это когда люди ограничивают себя объектами, о которых можно мыслить. Об этом можно спорить. Алгоритмисты говорят – зачем заниматься объектами, которые находятся вне следующих представлений – у нас есть первичные символы, но всего до конца не определишь. … Всегда есть уровень, на котором мы должны договориться, что мы это понимаем. Алгоритмисты к тому и призывают. Что можно говорить о правилах вывода в аксиоматике, но не следует. Мы занимаемся кругом задач, где есть определённые символы, они конечные, мы их можем нарисовать. И вы скажете – да, мы понимаем, что это. Участники вычислений понимают*

[320] Там же.

язык, на котором говорят. К тому же мы должны назвать круг правил, который будет действовать, тогда это будет алгоритм. А Чёрч соединил два мышления – мышление аксиоматическое и в смысле алгоритмистов. Он сказал: если взять функцию, которую задаёт алгоритм, то такие функции будут построены таким-то исчислением. Если не заниматься наведением порядка среди функций вообще. Функция там абстрактно определяется. Что такое отображение? – По какому-то правилу сопоставлено. … Зачем этим заниматься? – говорит алгоритмист. Наводить там порядок. … Вот значит: начальные символы, вот – правила, и мы ими занимаемся. Люди занимаются разными задачами. Нельзя сказать – кто из них лучше, а кто хуже. Конечно, алгоритмист, который ведёт реальные вычисления, с точки зрения экономики, менеджеров, конечно, востребован. А человек, который занимается законами мышления, аксиоматикой, менее им интересен. …

Встаёт вопрос, – каким кругом задач следует заниматься? Одни такой круг задач себе очертили, потому что просто удобно. От рождения мы видим непрерывность. Почему? Благодаря несовершенству нашего зрения. Вот физики сейчас задумались – правомерно ли мыслить себе любое сколь угодно малое расстояние, а может быть – нет? … Почему геометрия Киселёва такая удачная и до сих пор востребована? Потому что Киселев сумел понять, – с каким уровнем стереотипов мы рождаемся, какие впечатления получаем от того, что видим, и что в гены вошло от предыдущего поколения. Поэтому не стоит разделять. Одни – одним занимаются, а другие – другим, и соединить это никогда просто не удастся.

Павел Сергеевич Александров очень любил проблему промежуточной мощности между континуумом и счётностью. И он пытался её решить. Доказать существование, в том смысле, – не в мире, в мире ничего не существует из того, что математики придумали, всё в голове, – но в смысле аксиоматики. Что *эта мощность есть – он пытался доказать. Именно тогда он занялся словесностью, когда его постигло разочарование, что он не мог этого сделать. Потом он, всё-таки, вернулся в математику с Павлом Самуиловичем Урысоном. А потом стало понятно, что эту проблему нельзя было решить, она из аксиоматики, которой мы пользуемся, не вытекает. Может существовать другая математика, имеющая дело с промежуточными мощностями. Кстати, эти промежуточные мощности не востребованы. Они как-то специально в общей топологии возникают. Топологи любят заниматься сверхмощными множествами. А у нас сейчас это уже люди не любят. Даже на кафедре, которой заведовал Павел Сергеевич Александров, большинство научных руководителей занимаются такой здравой топологией применения комбинаторики, геометрии, дифференциальных уравнений. … Александров был очень хорошим учёным, но «флюс» в сторону абстрактной топологии создавал о нём не совсем верное впечатление»*[321].

Латышев раскрыл малоизвестные детали истории кафедры: «*Курош говорил, что популярность проблемы Бернсайда в России возникла благодаря ему. Именно он её распропагандировал. Ученик Шафаревича Алексей Иванович Кострикин занялся ослабленной проблемой Бернсайда, где основным инструментом были алгебры Ли, и связь между группами и алгебрами Ли. Так случилось, что я занимался тогда алгебрами Ли. Изначально я стал ими интересоваться, потому что Ширшов более занимался неассоциативными кольцами. И так произошло, что в Беляеве наши дома были через дорогу напротив друг друга. Когда Алексей Иванович первый раз выступил об ослабленной проблеме Бернсайда, он очень привлёк моё внимание, потому это было очень близко к тому, чем я тогда занимался. Мы с ним сошлись на семинаре. Потом выяснили, что живём рядом, и стали дружить семьями. Наступил момент, когда Курош заболел. …*

[321] Там же.

Он был большой демократ и спросил – кого хотят видеть в качестве заведующего кафедрой после него? Многие сказали, что Шафаревича, который был в большом авторитете. И он согласился. Но случились события, и по организационным причинам Шафаревич уже не смог стать заведующим[322]*. Когда Александр Геннадьевич Курош скончался, встал вопрос – кого пригласить на кафедру. Я к тому времени уже побыл на общественных и административных должностях, и мой голос имел какой-то вес при решении вопросов жизни факультета. Мне пришла идея пригласить Алексея Ивановича Кострикина. Он работал в Стекловке, в отделе Шафаревича. … Он был приглашён к нам, но у него не было преподавательского стажа. Он был заведующим кафедрой и ассистентом. Он должен был иметь стаж 3 года преподавания! А потом он стал членкором, заведующим кафедрой и ассистентом. Вот такое было смешное обстоятельство. Алексей Иванович полюбил преподавание и стал писать учебники, его «Введение в алгебру» стало каноническим»*[323].

Виктор Николаевич отметил проблемы современной системы оценки научных результатов и связанное

---

[322] Речь идёт о 1968 г., когда Курош перенёс инфаркт, от которого не оправился до своей смерти в 1971 г. Причиной инфаркта называют стресс от *«Письма девяносто девяти»* математиков министру здравоохранения и Генеральному прокурору СССР против беззаконной насильственной психиатрической госпитализации диссидента, логика и научного переводчика А.С. Есенина-Вольпина. Письмо было составлено далеко за стенами университета, но его подписали именитые сотрудники мехмата. Курош с Шафаревичем были в их числе. Письмо сразу же транслировали *BBC* и *«Голос Америки»*. Эти события привели к преследованиям протестовавших, расколу советского математического сообщества, росту антисоветских настроений среди научной интеллигенции и массовой эмиграции учёных из СССР. Видимо, последнее и было дальней целью мероприятия, организованного вскоре после математического Конгресса в Москве 1966 г.

[323] Там же.

с этим разрушение отечественной традиции. «*Развитые страны всегда борются с соблазном приобрести то, что уже есть и не трудиться самим, но это влечёт утрату самостоятельности. То есть, в хорошем смысле патриотические чувства нужны, если их не принимать в маргинальном смысле, то некоторое обособление должно быть. То есть, ты должен быть самостоятельным. … В нашем мире, к сожалению, эта в хорошем смысле патриотическая тенденция утрачивается.*

Наши замечательные учёные писали на русском языке, как-то не задумываясь об индексе цитирования. Печатались в наших российских журналах, некоторые из которых переводились. Подчас индекс цитирования у них был незначителен. …

Павел Сергеевич Александров как-то на заседании Совета факультета произнёс маленькую речь о том, что часто культивируются незначительные и слабые направления исследований, ссылаясь на то, что ими занимаются за рубежом. Но эти специалисты просто протягивают друг другу руку через океан, и поэтому нечего особенно на это обращать внимание. И когда я был за границей, я увидел, что Фредди Ойстайен очень смотрит за тем, чтобы процитировать учеников Попеску, а Попеску очень следит за тем, чтобы процитировать учеников Ойстайена. У них эта система работает давно и отлажено. … В этом есть рука бизнеса, так как от этого зависит финансирование. …

Курош, Гельфанд и Шафаревич, – довольно разные люди, – примерно раз в пять лет собирались. Может быть чаще. И говорили о том, чем надо будет заниматься в ближайшее время нашей алгебраической молодёжи»[324].

Латышев отмечает важную роль научных лидеров, авторитетом задающих пути исследований и определяющих «научную моду». Для национального сообщест-

[324] Там же.

ва необходимо иметь оригинальные научные темы. Они позволят инвестировать полученные результаты в концептуальное поле мировой математики, сохраняя свою ценность и уникальность как работающей исследовательской группы. Научные семинары на мехмате МГУ обеспечивали такое идейное своеобразие и приоритет в ряде математических областей.

***А.М. Вершик о математическом творчестве*.** Известный российский математик *Анатолий Моисеевич Вершик* родился в Ленинграде в 1933 г. Его отец преподавал политэкономию, а мать была профессором истории ЛГУ. В 1951 г. он поступил на матмех Ленинградского университета. По окончанию вуза в 1956 г. Вершик распределился в вычислительный центр, где занимался прикладными задачами. Через два года он поступил в аспирантуру матмеха к доценту Г.П. Акилову, ученику Л.В. Канторовича, специалисту по экономическим приложениям функционального анализа. Вскоре Вершик перешёл под руководство профессора В.А. Рохлина и в 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию *«Теория линейных преобразований, сохраняющих гауссову меру»*. С 1962 г. Вершик работал на матмехе ЛГУ. В 1974 г. он защитил докторскую диссертацию *«Аппроксимация в теории меры»*. В 1985 г. Вершик становится профессором матмеха. С 1992 г. он также работает в Санкт-Петербургском отделении Математического Института РАН, заведуя лабораторией вычислительной математики и теории представлений. С 2002 г. Вершик заведует лабораторией теории представлений и динамических систем ПОМИ РАН.

Научные интересы Вершика включают разные области: теорию меры и эргодическую теорию; бесконечномерные группы Ли и их представления; представления симметрической группы и группы кос; комбинаторную теорию вероятностей; неголономную механику, случайные блуждания на группах и случайные матрицы, линейное и нелинейное программирование. Он – автор около 250 научных работ.

Вершик активно работал в Петербургском Математическом Обществе: с 1970 г. входил в его правление, с 1979 г. был вице-президентом, в 1998–2008 гг. – президентом. В 1996–2000 гг. он состоял в Исполкоме Европейского Математического Общества. Вершик состоит в редколлегии 10 математических журналов. В 2007 г. он получил премию А. Гумбольдта, а в 2015 г. – премию фонда Д. Зимина *«Династия»*.

Вершик часто выступает о проблемах российской науки. Он размышлял и о математическом творчестве: *«Особенность математиков в том, что они любят говорить только о сделанных вещах, о планах и несделанных – как-то не принято, и даже не очень прилично говорить. Это очень понятно, но и жалко, что мы этого не обсуждаем. Математики в этом смысле – особенный народ. Например, очень тонкая и важная тема – обсуждение предыстории результатов и того, что относится к предварительному материалу. Говорить о «кухне» не принято. Про свою «кухню» я готов говорить, но думаю, что здесь это было бы слишком специально. Я думаю, что в других науках это не так, и может быть потому, что нигде больше, как в математике, грань, отделяющая «сделанное» от «несделанного», не является столь резкой. Но это замечание, скорее, внешнее. В частности, удивительная вещь, что математических дневников в литературе очень мало. Например, есть математическая автобиография Н.Г. Чеботарёва. Она очень интересная, опубликована в «Успехах математических наук» и иногда цитируется. Конечно, есть об этом у А. Пуанкаре. Но это скорее исключение. … Иногда работа, задача, – это просто про-*

клятье. Чаще всего, когда задача созрела, то думаешь о ней всё время, в том числе во сне. Это естественное состояние. Но бывает и другое – ощущение удовольствия – что ты думаешь именно об этой задаче, даже если это происходит долгое время и задача одна и та же, и даже если она не решается. Обычно это связано с тем, что процесс углубления в выбранную область сам по себе интересен. Но каждый математик знаком со своей или своими задачами-«обузами», которые надо давно решить, да вот... Обычно, как у меня, есть ряд областей, которые время от времени меняешь, и отдых состоит в том, что переходишь или возвращаешься от одной области к другой, и везде тебя ожидает много несделанного. Ситуация, когда вы что-то сделали, – это крайне редкое явление. Как точно сказал один мой хороший приятель: нормальное положение шлагбаума – закрытое. Думать, что типичная ситуация, это когда вы решили или вот-вот решите, – это неправильно. На самом деле, это долгий труд, часы, дни, и даже годы, когда вы не знаете, что делать. А момент, когда вы чего-то добились, – это большой приз»[325].

О своём подходе к математике Вершик написал: «*Человек по мере взросления всё лучше и лучше понимает себя. В частности, он всё лучше и лучше понимает свои недостатки. Пожалуй, что меняется, так это выбор задач. Вообще математики в этом смысле счастливые люди, в отличие от представителей других наук – там, где выбор задач в гораздо большей степени детерминирован. Например, физики изучают в гораздо большей степени ту реальность, которая у нас есть, и ничего другого (так должно бы быть). Конечно, для этого они и математики придумывают всякие модели, в том числе и «сумасшедшие». А математики в этом смысле вольный народ, у них*

[325] Вершик А.М. *«Воспоминания и стихи»/ «Матмех ЛГУ, шестидесятые и не только. Сборник воспоминаний».* Под редакцией Д. Эпштейна, Я. Шапиро, С. Иванова. Изд. 2-е, исправленное. – СПб: ООО «Копи-Р Групп», 2011, с. 93.

обязательств меньше, и свобода гораздо больше. Как пользоваться этой свободой – это как раз и есть вопрос о выборе задач. Сейчас я с большей строгостью, чем раньше, подхожу к тому, что я буду делать. С другой стороны, ещё одна связанная с этим вещь, которая тоже приходит с возрастом. Нужно, наконец, понять, что все задачи не решить. В молодые годы кажется, что ты выбрал некую область – и в ней сделаешь всё, иначе не имеет смысла начинать заниматься. Но надо уметь вовремя бросить. Надо понять, что всего не сделаешь, надо что-то оставить другим, а, может быть, ты всё и не можешь сделать. Поэтому надо искать другие темы. Для меня главной вещью всегда была эстетика, больше, чем что-либо другое. Я люблю вещи, которые – во всяком случае, мне – кажутся красивыми в своей естественности. Поиск естественных, красивых задач – это серьёзная и непростая вещь, и на это я всё больше обращаю внимание»[326].

Говоря о важности популяризации науки для привлечения талантливой молодёжи, Вершик сомневается в эффективности современных способов поощрения математиков: «*Приблизительно в 2000 году, когда стало известно о премиях фонда Клэя за решение каждой из семи отобранных знаменитых математических проблем, я встретил своего старого друга Артура Джеффи – он был тогда президентом этого фонда – и спросил его, зачем всё это делается. Мне тогда казалось, что назначение огромных премий – это, скорее, стиль шоу-бизнеса, цель которого – привлечение внимания к тому или иному предмету или человеку любой ценой; а научная жизнь должна избегать дешёвой популяризации. Неужели не ясно, что монетизация решения научных проблем, а не сам по себе научный интерес, не прибавит энтузиазма математику: если он уже занимается гипотезой Римана или проблемой Пуанкаре, то ему дополнительная приманка не нужна. И она же не привле-*

---

[326] Там же, с. 94–95.

чёт серьёзного математика ни к одной из этих проблем, если он ими не занимался и не является специалистом в этих областях. На это Артур ответил решительно и со знанием дела: «Ты ничего не понимаешь в американской жизни. Если чиновник, бизнесмен, домохозяйка увидят, что можно заработать миллион, занимаясь всерьёз математикой, то они своим детям, если те захотят идти в математику, не будут препятствовать, и не будут настаивать на том, чтобы те шли в медицину, юриспруденцию и в другие "денежные" профессии. Да и другие богачи будут охотнее жертвовать на математику средства, которых нам так не хватает». Этот ответ тогда меня отчасти убедил.

И вот одна из семи проблем – проблема Пуанкаре – решена... Так полезной ли для математики была затея о миллионах? Я всё-таки вернулся к своему первоначальному мнению. Количество людей, занимавшихся этими 7 проблемами, вряд ли изменилось после объявления о премиях. Решивший проблему Г.Я. Перельман занимался ею и до этого. Фонд Клэя тут ни при чём. … Да и смешно думать, что кто-то из неспециалистов (даже математиков), услышав о награде и решив поэтому заняться задачей, имеет хоть какой-нибудь шанс решить проблему такого уровня. Если так, то ускорение прогресса в математике от финансовой стимуляции не произошло. … Замечу также, что ажиотаж вокруг 7 проблем создаёт в обществе неверное представление, потакающее избитым мнениям, будто математическая работа заключается только в решении конкретных задач. … Специалисту не надо объяснять, насколько это неверно. Открытие новых областей и связей между ними, постановка новых проблем, разработка и совершенствование аппарата – всё это не менее важные и трудные вещи, без которых наша наука не может существовать.

Но можно ли вообще подобными методами повысить интерес общества к математике и обеспечить приток молодёжи в математику, как планировалось организаторами премий? Не *уверен. … Тому, кто в науку влюблён с юности, дополнительных инъекций не надо. А тем, кто смотрит при выборе профессии в первую очередь на то, какие открываются возможности для нормальной жизни, важен, разумеется, не стимул в виде миллиона за недоступную задачу, а совсем другое… Нужен ли математике такой площадный интерес? Был бы подобный резонанс, если бы не было пышного объявления о премии Клэя? Наверное, нет. Решение Великой проблемы Ферма Вайлсом в 1996 году не вызвало такого бума, и не потому, что проблема не столь значима. Объяснение состоит в том, что слишком тесно увязаны мало совместимые вещи – серьёзный научный результат и вылезающий на первый план «миллион». … Французская академия когда-то тоже назначала премии за решение конкретных математических задач, но это были сравнительно скромные премии, не объявлявшиеся с такой помпой. Престижная Филдсовская медаль – прежде всего медаль; параллельное сравнительно скромное денежное вознаграждение – на втором плане, о нём никогда не говорят. И нобелевские, и абелевские премии, при возможном дискуссионном отношении к их присуждениям, вызывают в сознании у людей в первую очередь мысль о больших достижениях научного плана. Редкие отказы от премий случались и ранее, и всегда имели авторскую мотивировку. Разумеется, после того, как крупная математическая проблема решена, … действительно, следует солидно поощрить автора (если он не откажется), и обычно средства для этого находились. Проблема с премиями, действительно, есть, математических научных премий должно быть гораздо больше; к сожалению, сейчас распределение большинства престижных премий имеет ярко выраженный дельтаобразный характер. Но это другой вопрос.*

В нашем случае мы имеем дело с априорной и непомерной денежной оценкой решения научной проблемы. Так ли уж нужно как-то определять их денежный эквивалент со многими нулями, да и как это сделать? Проблемы Гильберта не оценивались в *миллионах, но их популярность среди математиков от этого не пострадала. Делать же из серьёзных научных проблем что-то вроде «лото-миллион» – значит потакать дурному вкусу толпы. В ответ мы и получаем общественный эффект под стать такой шкале «ценностей». Пропагандировать науку надо более тонкими средствами, а денежные средства, которых нам действительно не хватает и которые дальновидные бизнесмены отдают на науку, надо использовать более эффективно»*[327].

По мнению Вершика, есть почти неразрешимая трудность в популяризации современных математических идей. Она обусловлена сложностью решаемых проблем и невозможностью без значительного упрощения переведения сути результатов на обеспеченный школой уровень математических знаний.

С.С. Кутателадзе об этике математического сообщества. Известный российский математик *Семён Самсонович Кутателадзе* родился в 1945 г. в Ленинграде в семье выдающегося физика Самсона Семёновича Кутателадзе. В 1962 г. его семья переехала в Новосибирский Академгородок. В 1963 г. он поступил на мехмат НГУ. После его окончания в 1968 г. он стал работать в Институте математики Сибирского отделения АН. В 1970 г. Кутателадзе защитил диссертацию к.ф.-м.н. *«Смежные вопросы геометрии и математического программирования»*. Его научным руководителем был профессор Г.С. Рубинштейн, ученик и сотрудник Л.В. Канторовича. В 1978 г. Кутателадзе защитил докторскую диссертацию *«Линейные задачи выпуклого анализа»*. Кутателадзе состоит профессором кафедры математического анализа в НГУ, и заведовал лабора-

---

[327] Вершик А.М. *«Что полезно математике? Размышления о премиях Clay Millenium»*/ *«Матмех ЛГУ–СПбГУ от истоков до дней недавних. Дополнительные главы. Сборник материалов»*. – СПб, 2015, с. 273–275.

торией функционального анализа ИМ СОРАН. Его научные интересы лежат в области функционального, выпуклого, негладкого и нестандартного анализа. Он – автор более 400 научных, учебных и научно-популярных публикаций, и активно работает в редколлегиях десятка математических журналов.

Кутателадзе часто пишет об истории математики и этике научного сообщества. Он считает, что математика имеет особое значение для культуры: «*Математика наших дней стала цитаделью логики, хранителем порядка в мыслях, защитником строгости и объективности суждений*»[328]. Он поясняет: «*На рубеже XIX и XX веков в математике произошли революционные изменения. Строгому анализу математика подвергла свой сокровенный инструмент – творческий процесс доказательства. Разрешимость и неразрешимость, доказуемость и недоказуемость, противоречивость и непротиворечивость вошли в исследовательский лексикон учёных. Математика стала рефлексивной наукой, занятой не только поиском истины, но и изучающей собственные способы её поиска. … Математика – довольно специальная сфера интеллектуального творчества, обладающая неповторимыми, только ей присущими особенностями. Георг Кантор, создатель теории множеств, писал в одной из своих классических работ в 1883 г.: «...das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit». Иначе говоря, «сущность математики заключена в её свободе». Свобода современной математики не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. В немалой мере она проявляется в новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости*»[329].

---

[328] Кутателадзе С.С. *«Математика и свобода»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 206.
[329] Там же, с. 207–208.

Формализм он считает второстепенным: «*Математика гораздо менее философична, чем представляется философам. Она связана с простейшими формами сознаниями и далеко не всегда с формализмами. Скажем, Рамануджана никакие формализмы не интересовали, как и всю автохтонную индийскую математику. Понять как и что – это одно, а доказать – совсем другое. Тезис Бурбаки о тождественности доказательства и математики имеет весьма ограниченное значение в современном существовании математики. Бездоказательная – экспериментальная и познавательная – математика вездесуща и никакой философской или формальной истиной не оперирует. Знание превалирует над доказательством и пониманием*»[330].

Одна из тем Кутателадзе – этика математической жизни. В истории математики он черпает поучительные примеры поведения учёных. Изображая обстоятельства *«дела Лузина»* он пишет: «*История и ушедшие люди неподсудны. Учёные и просто люди обязаны констатировать факты. Не осуждать ушедших, а спокойно и прямо указывать на то, что было. Разъяснять молодым отличие моральных обвинений от политических инсинуаций и клеветы. Объяснять трудность и необходимость исправления ошибок и покаяния. Показывать, как легко прощать себя и винить других. Мы обязаны формировать в себе и передавать другим объективный взгляд на прошлое. На его успехи и трагедии*»[331].

Кутателадзе превозносит науку с позиции гуманизма: «*Научные понятия – важнейшие элементы мировоззрения каждой личности. Они едины для всех людей независимо от расы, национальности, гражданства и конфессии. Научное мировоззрение носит светский характер, открыто для обсуждений,*

---

330 Кутателадзе С.С. *«О науке и около»*. 4-е издание, дополненное. – Новосибирск, 2015, с. 8.

331 Кутателадзе С.С. *«Корни дела Лузина»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 95.

не ограничивает ни свободу мысли, ни свободу убеждений, ни свободу совести. Научное мировоззрение не требует, чтобы его исповедовали, не связано с мистикой, отправлением ритуалов, обрядов и культов. Наука признает безусловное право каждого придерживаться и выражать своё мнение, свободу искать, получать и распространять всякого рода информацию и идеи. … Научное мировоззрение общедоступно и доказательно. Наука просвещает, а не обращает, она ненавязчива и уважительна к человеку. Основываясь на знаниях, наука признает их человеческую природу, неизбежные ограниченность и неполноту. … Объективность и человечность – источники нравственности научного мировоззрения. Научное мировоззрение не разделяет, а соединяет людей. Ищущий и нашедший истину человек – вот источник и цель научного мировоззрения»[332].

Особая тема Кутателадзе – стимулирование и контроль научной деятельности. Он пишет, что главным мотивом работы учёного должен быть поиск истины, а не борьба за приоритет. Этическая практика математического сообщества наглядно проявляется в экспертной деятельности по оценке результатов коллег. К эксперту предъявляются неписаные моральные требования: «*Рецензент выполняет просьбу редколлегии оценить содержание статьи. Он высказывает свои суждения о конкретном сочинении, а не об авторе, его способностях, судьбе и будущем. … Рецензент по возможности воздерживается от оценивания статей своих учителей и учеников, друзей и врагов*»[333]. Кутателадзе открывает на обозрение редакционное Зазеркалье. Отработав во многих престижных изданиях, он

---

[332] Кутателадзе С.С. *«Человек и научное мировоззрение»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 217–218.

[333] Кутателадзе С.С. *«Памятка рецензенту»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 266–267.

советует рецензенту противопоставлять себя авторам во имя науки. Его служение, по Кутателадзе, не в том, чтобы разбираться в содержании рассматриваемых статей. Некоторые авторы не подозревают, что, послав свою работу в академический журнал, отдали её неизвестному прокурору: «*Рецензент не обязан проверять достоверность содержания статьи, но должен явно формулировать любые свои сомнения в достоверности содержания. Все сомнения рецензент и редколлегия толкуют в пользу науки, а не автора. … Рецензент – прокурор науки, а не адвокат и не палач автора. Рецензент защищает науку от шума, а не автора от редколлегии. … Рецензирование – долг научного служения. Наука служит истине, а не справедливости*»[334].

Трудно согласиться с мнением, что «*хороший результат никогда не пропадёт для науки. Такой результат можно объяснить первому встречному*». Кутателадзе полагает, что «*не всякий трудный или кропотливый результат хорош. Новизна результата и труд, вложенный автором в работу, недостаточны для её опубликования*»[335]. Тяготея к философии неолиберализма, Кутателадзе переносит её характерные установки на организацию науки. И он истолковывает принцип экономии мышления как экономию затрат рецензента на добровольно взятую работу.

Кутателадзе декларирует свободу выбора основополагающим принципом науки. Он полагает, что учёные должны стремиться к проблемам, позволяющим находить новые нетривиальные результаты: «*В науке мы ценим то, что делает нас умнее*». Ценятся задачи, открывающие пути к новым плодотворным понятиям и методам. Кутателадзе выступает против догматизма и утилитаризма: «*Паническая боязнь нового часто проявляется в*

[334] Там же.
[335] Там же.

математике постановкой вопросов утилитарности, в стиле «Какую пользу от исследований в области теории моделей я получу при вычислении такой-то величины или доказательстве такой-то теоремы существования?». Аналогичной глубины суждения сопутствуют теории категорий и нестандартному анализу. Вот типичный вопрос: «Я, имярек такой-то, не могу доказать некоторую теорему в теории динамических систем, а Вы можете доказать её с помощью методов нестандартного анализа? А без помощи этих методов?». Надо ли говорить, что подобные комичные суждения высказывают даже высококвалифицированные люди, хорошо знакомые с понятием консервативного расширения»[336]. Кутателадзе направляет поведение учёных следующими нормами: *«Цитировать себя можно только при крайней необходимости, например, в случае непосредственного использования предыдущей своей работы, никем, никак и нигде больше не отражённой. Выполнить это пожелание трудно – мало кому удаётся оставаться в рамках приличий. Надо проявлять и сдержанность и скромность. Самовыпячивание и хвастовство унизительны. Хорошую работу заметят и, когда смогут, поймут. Полезное не пропадёт, да шансов такое написать немного. Поэтому стоит сохранить хотя бы своё доброе имя»*[337].

---

[336] Кутателадзе С.С. *«Три неизбежные задачи»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 285.

[337] Кутателадзе С.С. *«О науке и около»*/ *«Наука и люди»*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010, с. 315.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В жизни любого математика есть моменты размышлений об особенностях своей науки, её основаниях и пользе для общества. Раньше или позже, но это непременно происходит. На ответы могут влиять многие факторы – мнения учителей, стиль научной школы и её идеология, спектр решаемых проблем, достигнутая позиция, философские убеждения и круг тесного общения. Наш заведомо неполный очерк философских воззрений известных отечественных математиков XX века отчасти показывает, как меняются установки научного сообщества, и какие разногласия порождает простой, казалось бы, вопрос – «Что такое математика?». Образ математики отражается во множестве восприятий, и в каждом находит своё измерение.

Мы выражаем искреннюю признательность нашим терпеливым собеседникам – профессорам В.А. Ильину, А.Т. и Т.Н. Фоменко, М.М. Арсланову, В.Н. Латышеву. Благодарим своих коллег-математиков – профессоров А.А. Бутова, С.П. Мищенко, С.Н. Тронина и близкого друга Е.Е. Демидова за предоставленную информацию. Мы также благодарим С.Е. Марасову за проверку чернового варианта рукописи.

Авторы:

Баранец Наталья Григорьевна – доктор философских наук, доцент, профессор кафедры философии Ульяновского государственного университета. Область научных интересов – философия и методология науки, история и социология науки, история русской философии. Автор более 270 научных трудов. Среди них монографии: Философское сообщество: структура и закономерности становления (Россия рубежа XIX–XX веков). – Ульяновск, 2003; Метаморфозы этоса российского философского сообщества в XIX – начале XX века. В 2-х ч.: Ч.1. – Ульяновск, 2007; Российское философское сообщество и трансляция философского знания на рубеже XIX–XX веков. – Ульяновск, 2007; Философское сообщество в России: историко-методологические очерки. – Ульяновск, 2007; Метаморфозы этоса российского философского сообщества в XX веке. В 2-х частях: Ч.2. – Ульяновск, 2008; Российское философское сообщество и трансляция философского знания в XX веке. – Ульяновск, 2008.

Личная страница в Интернете: http://staff.ulsu.ru/baranetz/

Верёвкин Андрей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Ульяновского государственного университета. Область научных интересов – история и философия математики, общая алгебра, комбинаторика и алгебраическая геометрия. Автор более 110 научных трудов, в том числе книги: История и философия математики. – Ульяновск, 2013.

Личная страница в Интернете: http://staff.ulsu.ru/verevkinab/

Соавторы совместно выпустили три монографии: Методологическое сознание российских учёных в XIX – начале XX века. – Ульяновск, 2011; Российские математики о науке и философии. – Ульяновск, 2012; Математики об истории. Вехи одного научного противостояния. – Ульяновск, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЕ XX ВЕКА

Философская традиция представления математики 6

Развитие математики в XIX веке и проблема оснований математики 18

Основные течения философии математики 26

ОТ ПОЗИТИВИЗМА К ФОРМАЛИЗМУ И КОНВЕНЦИОНАЛИЗМУ В РОССИИ

Позитивистский подход В.В. Бобынина 43

В.А. Васильев между формализмом и эмпириокритицизмом 45

Конвенционализм В.А. Стеклова 48

С.А. Богомолов между формализмом и интуитивизмом 53

Н.Н. Лузин о математике 60

КАМПАНИЯ ПО ДИАЛЕКТИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ

Идеологическая кампания в математике 1930-40-х гг. 67

О.Ю. Шмидт о роли математики в строительстве социализма 74

Борьба С.А. Яновской за материалистическую диалектику в математике 79

Э.Я. Кольман – идеолог в математике 88

ДИАЛЕКТИКО-МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИКИ

А.Н. Колмогоров о природе математического знания 99

Эволюция статьи «Математика» в БСЭ 101

Периодизация истории математики по А.Н. Колмогорову 104

Концепция строения математической теории А.Н. Колмогорова 115

А.Д. Александров о математике и её методе 118

Периодизация истории математики по А.Д. Александрову 123

Закономерности развития математики 128

Материалистическое понимание геометрии П.К. Рашевского 138

ИСКУШЕНИЕ БУРБАКИЗМОМ

«Архитектура математики» Н. Бурбаки 145

А.А. Ляпунов о математических теориях и роли математики 154

Г.Е. Шилов: от критики к признанию бурбакизма 168

М.М. Постников о том, является ли математика наукой 177

О ПРИЛОЖЕНИЯХ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПОЛЕЗНОСТИ

Л.В. Канторович о математических методах планирования производства 182

Н.Н. Моисеев о единстве абстрактной и прикладной математики 193

И.Р. Шафаревич о красоте математики 199

В.И. Арнольд - «Математика это физика!» 204

Ю.И. Манин о математике как метафоре 213

Спор о полезности математики между В.И. Арнольдом и Ю.И. Маниным 219

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ТВОРЧЕСТВЕ

Л.С. Понтрягин о выборе тематики исследования 223

И.М. Гельфанд о перспективах математики 229

В.А. Ильин о математических проблемах и оценке их решения 235

А.Т. Фоменко о строгости математического доказательства и творчестве 247

Ю.Л. Ершов о «задачном подходе» в философии математики 259

М.М. Арсланов о знаменитых математических проблемах 270

Т.Н. Фоменко о развитии математики 280

В.А. Успенский об особенностях математического познания 286

В.Н. Латышев о выборе направления математических исследований 299

А.М. Вершик о математическом творчестве 311

С.С. Кутателадзе об этике математического сообщества 317

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 323

Научное издание

Наталья Григорьевна Баранец,

Андрей Борисович Верёвкин

ОБРАЗЫ МАТЕМАТИКИ

(СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ О НАУКЕ)

В авторской редакции.

Издатель
Качалин Александр Васильевич
432042, Ульяновск, ул. Рябикова, 4.

Подписано в печать 27.11.2015.
Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая.
Гарнитура Bookman Old Style.
Усл.печ.л. 18,87. Заказ № 15/129.

Тираж 300 экз.

Отпечатано в издательско-полиграфическом
центре «Гарт» ИП Качалин А.В.
432042, Ульяновск, ул. Рябикова, 4.