

La Storia:
Finzione
o Scienza?

C R O N O L O G I A

3

di Anatoly T. Fomenko

testo tradotto liberamente in italiano dal CESARE Claudio dell'Orda

PARTE 1

La datazione dell'Almagesto

di A. T. Fomenko, V. V. Kalashnikov,
G. V. Nosovskij

L'analisi degli errori sistematici dei cataloghi stellari.

0. Concetto base.

0.1. Analogia dimostrativa.

La necessità di analizzare gli errori contenuti nei cataloghi stellari sono già stati spiegati in precedenza. Innanzitutto ci stiamo riferendo all'*Almagesto*; tuttavia, il metodo in questione potrà essere applicato anche ad altri cataloghi, sia quelli reali che quelli generati artificialmente. Nel presente capitolo dimostreremo come scoprire e compensare gli errori sistematici. L'idea alla base del metodo è semplice e del tutto ovvia. Inoltre, viene utilizzata in matematica statistica da ormai un po' di tempo. Al fine di spiegare il concetto di base, consideriamo il seguente esempio. Supponiamo di doverci occupare dei risultati di un concorso di tiro a segno come mostrato nella **Figura 0.1**.

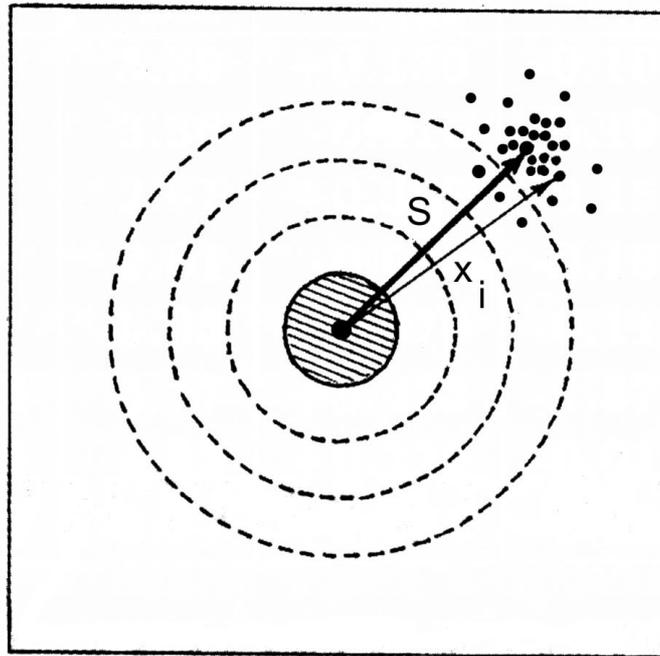


Figura 5.0. Un bersaglio con i fori dei proiettili.

I punti rappresentano i fori dei proiettili. Quanto è buona la precisione dei colpi? La risposta è ovvia: non lo è affatto. Tuttavia, possiamo vedere che il raggruppamento effettivo dei colpi è abbastanza buono. Questo ci porta all'assunto che il tiratore è stato in effetti bravo; il fatto che i proiettili abbiano colpito un punto che si trova a lato del bersaglio può essere spiegato da un difetto nel mirino del fucile. Ovviamente non possiamo dire nulla sulla natura del difetto senza vedere il fucile, tuttavia possiamo stimare il valore della deviazione. Un modo ragionevole per farlo ci potrebbe richiedere di determinare il centro geometrico di tutti i risultati e disegnare un vettore dal centro del bersaglio verso il centro calcolato (il vettore S sullo schema). Come facciamo a calcolare

formalmente il vettore S ? La procedura è semplice. Dobbiamo prendere i vettori x_i che corrispondono ai risultati dei tiri e fare una media per la quantità totale dei colpi N :

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Dobbiamo anche sottolineare che il vettore S può essere calcolato in alternativa dal problema della minimizzazione della discrepanza media quadratica, per cui dobbiamo trovare il vettore S che fornisca il minimo della funzione

$$\sum_{i=1}^N (x_i - S)^2$$

Ora stimiamo che $(x_i - S)^2 = (x_{i1} - S_1)^2 + (x_{i2} - S_2)^2$, dove x_{i1} , x_{i2} e S_1 , S_2 sono le rispettive coordinate dei vettori x_i e S .

La precisione effettiva del tiratore può quindi essere caratterizzata dal campo di diffusione dei risultati attorno al centro che è stato scoperto; questa precisione è quindi molto più superiore a quella di colpire il bersaglio. Il calcolo del vettore S rappresenta l'effettiva procedura di compensazione dell'errore sistematico per questo esempio (il cui valore equivale a S).

Se volessimo usare formalmente un sistema di coordinate diverso, spostando lateralmente il punto iniziale del centro del bersaglio tramite il vettore S , i risultati degli spari come indicati nel nuovo sistema di coordinate dovrebbe contenere solo le componenti casuali (quelle risultanti dal tremolio delle mani, ecc.), senza nessuna componente regolare.

Ritorniamo ora al catalogo stellare e ipotizziamo di dover verificare se potrebbe esserci un errore sistematico in alcune parti del catalogo e determinarne il valore qualora dovesse effettivamente esserci. Supponiamo di non dover ancora affrontare il problema della datazione, vale a dire che conosciamo la data di quando il catalogo t_A è stato compilato per certo (ovviamente, A sta per Almagesto; comunque sia, tutte le considerazioni di cui sopra sono valide anche per gli altri cataloghi). Dobbiamo quindi confrontare le coordinate effettive delle stelle per il momento t_A (noto dai cataloghi moderni precisi) con i valori delle coordinate prese dal catalogo in fase di studio, che riguardano quella parte che sarà utilizzata nella nostra ricerca. Questo confronto richiede il calcolo del tasso medio di discrepanza per le coordinate messe a confronto, proprio come abbiamo fatto nell'esempio della precisione dei colpi di fucile.

Mettiamo che il totale delle stelle nell'area selezionata sia uguale a N . Useremo le indicazioni l_i e L_i rispettivamente per la longitudine eclittica effettiva della stella i nel catalogo in esame e il suo esatto valore longitudinale. In questo caso, l'errore medio (sistematico) della longitudine sarà uguale a

$$\Delta \bar{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_i - L_i),$$

con l'errore sistematico latitudinale pari a

$$\Delta \bar{B} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (b_i - B_i).$$

Come abbiamo già accennato, questi errori possono risultare dalla stima errata del piano dell'eclittica come anche da una serie di altre ragioni che rimangono a noi sconosciute. Non siamo in grado di dire nulla riguardo alla natura esatta di queste circostanze, tuttavia avanza una serie di ipotesi. Nonostante tutto questo, possiamo e vogliamo compensare l'errore che è stato causato. Occorre solo alterare il sistema delle coordinate del catalogo analogamente a come è stato fatto

nell'esempio del bersaglio, in un modo che renderebbe la media risultante dagli errori longitudinali e latitudinali pari a zero.

0.2. L'implementazione del metodo.

In questo paragrafo dimostreremo l'applicazione pratica del concetto generale di cui sopra.

Prima di tutto, vogliamo sottolineare che compenseremo solo l'errore latitudinale. Le ragioni sono state tutte citate in precedenza; in pratica ci consente di minimizzare l'errore nei calcoli, che è vitale se si considera la scarsa precisione dei vecchi cataloghi.

Pertanto, ciò che abbiamo a disposizione è il catalogo da cui abbiamo selezionato un folto gruppo di stelle il cui numero totale è pari a N , con le coordinate $(l_i, b_i)_{i=1}^N$. I loro doppioni del catalogo moderno ci sono già noti dalla procedura di identificazione condotta in precedenza. Usiamo le indicazioni $(L_i(t), B_i(t))_{i=1}^N$ per far riferimento alle coordinate dei menzionati doppioni calcolati per il momento t . Ora supponiamo di voler esaminare il valore del possibile errore sistematico, partendo dal presupposto che la data di compilazione del catalogo sia t_A .

Definiamo

$$L_i^A = L_i(t_A), B_i^A = B_i(t_A)$$

e introduciamo la discrepanza latitudinale

$$\Delta B_i^A = B_i^A - b_i.$$

Il nostro obiettivo è quello di minimizzare il valore di

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (\Delta B_i^A)^2 \rightarrow \sigma_{min}^2,$$

cambiando il sistema delle coordinate o disegnando semplicemente una nuova griglia di coordinate, diversa da quella utilizzata nel catalogo.

Qualora volessimo considerare il problema di minimizzare l'espressione menzionata sopra, la modifica della griglia delle coordinate potrebbe essere parametrizzata da due valori: γ e φ . Li potete vedere più avanti nella **Figura 5.1**. Permetteteci di spiegare cosa rappresentano. Qui, γ è l'angolo tra l'eclittica effettiva e l'eclittica del catalogo, mentre φ rappresenta l'angolo tra linea dell'equinozio e la linea di intersezione tra l'eclittica effettiva e l'eclittica del catalogo.

Per cui, dopo aver risolto il problema di minimizzare l'espressione di cui sopra, possiamo calcolare i valori di γ_{stat} e φ_{stat} che sono in grado di parametrizzare l'alterazione del sistema delle coordinate e darci il minimo iniziale. La loro forma esplicita può essere vista di seguito nelle formule 5.5.2 e 5.5.3.

Il valore di σ_{min} è l'errore residuale della latitudine media quadratica a cui siamo arrivati dopo la compensazione dell'errore sistematico. La forma esplicita della formula di dispersione residuale σ_{min} può essere vista di seguito, dopo la formula 5.5.10. Deriva dall'uso di γ_{stat} e φ_{stat} come parametri per l'aberrazione dell'espressione media quadratica. La derivazione di queste formule può essere vista sotto.

Tuttavia, non possiamo presumere di aver trovato l'errore sistematico (o piuttosto, i parametri γ_{stat} e φ_{stat} che lo caratterizzano) con assoluta precisione. La questione è che i singoli errori di misurazione (che sono di natura casuale) influenzano anche i valori di γ_{stat} e φ_{stat} . Pertanto, possiamo solo affermare che i valori effettivi dell'errore sistematico sono vicini a γ_{stat} e φ_{stat} .

Per rendere più precisa la nostra affermazione, introduciamo il concetto di “intervallo di confidenza”. Mettiamo che $1-\varepsilon$ rappresenti un certo livello di confidenza. Ad esempio, se $\varepsilon = 0.1$ il livello di confidenza dovrebbe essere pari a 0,9. Il livello di confidenza rappresenta la probabilità che garantisce la precisione dei nostri risultati; l'intervallo di confidenza è l'intervallo che include il valore reale sconosciuto del parametro con una probabilità minima di $1-\varepsilon$. Definiamo

$$I_\gamma(\varepsilon) = [\gamma_{stat} - x_\varepsilon, \gamma_{stat} + x_\varepsilon]$$

(ovvero l'intervallo di confidenza per il valore effettivo del parametro γ) e

$$I_\phi(\varepsilon) = [\phi_{stat} - y_\varepsilon, \phi_{stat} + y_\varepsilon]$$

che è l'intervallo di confidenza per il valore effettivo del parametro ϕ . Si può dimostrare (vedi sotto) che i valori di x_ε e y_ε possono essere calcolati dalle formule

$$x_\varepsilon = q_\varepsilon, y_\varepsilon = q_\varepsilon,$$

dove $q_\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, il frattile della distribuzione normale standard come calcolata dalle tabelle.

Pertanto, se volessimo definire un certo livello di confidenza $1-\varepsilon$, potremmo garantire che il valore reale di γ cada nell'intervallo $I_\gamma(\varepsilon)$ e che il valore di ϕ rientri nell'intervallo $I_\phi(\varepsilon)$, con una probabilità non inferiore a $1-\varepsilon$.

0.3. Il valore dell'errore sistematico non può essere usato per datare il catalogo.

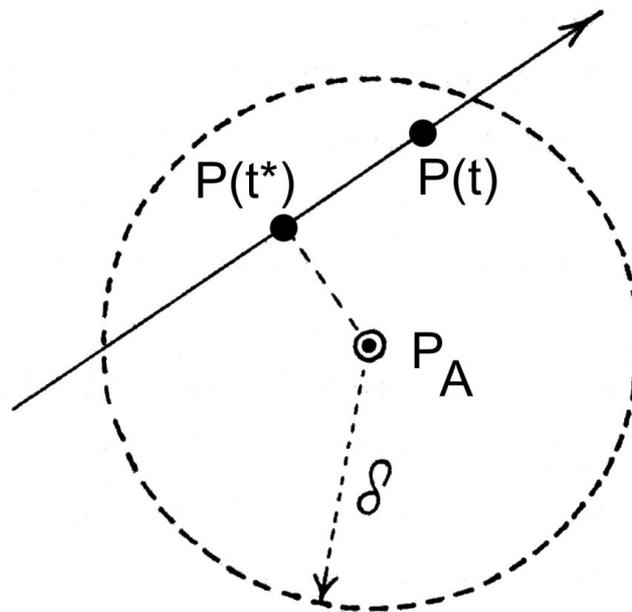


Figura 5.0a. I due poli: quello sull'eclittica e quello nel catalogo.

Ora forniamo un'interpretazione un po' diversa dei valori calcolati per γ_{stat} e ϕ_{stat} . L'uso delle coordinate stellari (di fatto è sufficiente considerare solo le latitudini) permette il facile calcolo dei poli dell'eclittica P_A (per il catalogo in fase di studio) e $P(t)$ per i calcoli nel catalogo del momento t , vedi il diagramma nella **Figura 5.0a**.

È ovvio che la distanza dell'arco tra P_A e $P(t)$ sia precisamente uguale a γ_{stat} e che la compensazione dell'errore sistematico non richieda altro che la sovrapposizione di questi due poli. Consideriamo

ora i cambiamenti nel quadro generale che avvengono nel corso del tempo. Poiché $P(t)$ si sposta all'interno dei limiti per un grado, possiamo usare un diagramma piatto e assumere che il moto di $P(t)$ sia uniforme, vedi il diagramma nella **Figura 5.0a**.

La velocità v di questo moto uniforme sarebbe abbastanza facile da calcolare se conoscessimo i valori di γ_{stat} per i due punti differenti. Quindi, potremo calcolare il momento t^* quando la posizione del polo effettivo sarà molto vicina a quella del polo del catalogo. A prima vista potremmo presumere che questo momento possa essere dichiarato come il momento della datazione dedotto dall'elaborazione delle coordinate di moltissime stelle. Tuttavia, abbiamo già dimostrato l'errore di tale logica; pertanto è doveroso dire che non si può datare il catalogo per il momento di t^* . Infatti, se il possibile errore sistematico nella stima dell'eclittica di Tolomeo potesse eguagliare il valore di δ , tutti i momenti nel tempo che corrispondono al passaggio del polo $P(t)$ attraverso un cerchio avente il raggio pari a δ e il cui centro si trovasse nel punto P_A , dovrebbero essere considerati dei possibili candidati per il periodo della datazione. Tuttavia, non conosciamo il valore di δ . Ovviamente possiamo stimarlo, ma solo a patto di conoscere la datazione del catalogo. Una data presunta diversa fornirebbe un valore di stima diverso. Perciò, questo valore contiene già una presunta datazione.

Pertanto, a seconda dell'errore sistematico di Tolomeo, ossia l'errore nella determinazione dell'eclittica, il momento t^* potrebbe precedere la data effettiva di compilazione del catalogo o postdatarla. Nel primo caso, il catalogo (o piuttosto, la parte per la quale stiamo provando a stimare il valore di γ_{stat}), guadagnerà un'età "extra" e inizierà ad assomigliare al catalogo compilato nell'anno t^* . Nel secondo caso (quando t^* posdata la data effettiva della compilazione) il catalogo diventerà più recente. Di seguito potremo vedere che nell'*Almagesto* sono state implementate entrambe queste possibilità. Tuttavia, i termini "età extra" e "più recente" si riferiscono a un catalogo dove gli errori sistematici non sono stati compensati. Ciò che otteniamo dopo la compensazione è un "catalogo raffinato" che contiene solo gli errori casuali i cui valori medi quadratici possono essere stimati pari a σ_{min} , sebbene non possa essere determinato nessun valore individuale.

Consideriamo ora l'uso pratico dell'idea generale come specificata nei dettagli in precedenza.

1. Definizione principale.

Da questo capitolo in poi ipotizzeremo di avere a che fare con un catalogo in cui ogni stella ha un solo doppiante tra le stelle del catalogo moderno. Di conseguenza, useremo l'indice i per identificare le stelle, così come l_i e b_i rispettivamente per la longitudine e la latitudine dell'eclittica della stella i nell'*Almagesto*. $L_i(t)$ e $B_i(t)$ saranno utilizzati per riferirsi alla longitudine e latitudine effettive della stella i nell'epoca t . Tenete a mente che il tempo t è stato calcolato a ritroso dal 1900 d.C. e misurato in secoli; vale a dire che $t = 3.15$ corrisponde all'anno 1900 - $3.15 \times 100 = 1585$ d.C., ad esempio, mentre $t = 22.0$ corrisponde all'anno 1900 - $22 \times 100 = 300$ a.C.

Mettiamo che t_A sia pari al periodo sconosciuto della compilazione del catalogo dell'*Almagesto*. La longitudine e latitudine effettive della stella i per l'anno in cui il catalogo è stato compilato, dovranno essere indicate come L_i^A e B_i^A , cioè $L_i^A = L_i(t_A)$, $B_i^A = B_i(t_A)$. Mettiamo che $\Delta B_i(t) = B_i(t) - b_i$ rappresenti la differenza tra la latitudine effettiva della stella i per il momento t e la sua latitudine come indicata nell'*Almagesto*. Il valore di $\Delta B_i(t)$ è stato descritto come la discrepanza latitudinale per il periodo t . Questo valore indica l'errore nella stima della latitudine della stella dell'*Almagesto* a condizione che sia stato compilato nell'epoca t . È ovvio che l'errore effettivo nella stima della latitudine è rappresentato da $\Delta B_i(t_A) = \Delta B_i^A$.

Come abbiamo già sottolineato nel Capitolo 3, dobbiamo solo analizzare gli errori latitudinali nel caso dell'*Almagesto*. Le ragioni sono state spiegate nei dettagli in precedenza.

2. La parametrizzazione degli errori di gruppo e degli errori sistematici.

Consideriamo un certo gruppo di stelle tipo una costellazione o più costellazioni. Definiremo l'errore di gruppo nelle coordinate latitudinali di queste stelle, come l'errore nella stima delle latitudini stellari per il gruppo in questione risultante dal moto della configurazione stellare sotto esame attraverso la sfera celeste nel suo insieme. Pertanto (mettiamo un'enfasi speciale su questa circostanza a causa del suo ampio utilizzo più avanti) anche ogni sottoinsieme di questa configurazione si sposterà attraverso la sfera celeste con lo stesso angolo dell'intera configurazione. Questi spostamenti hanno tre gradi di libertà, cioè possono essere descritti dalla specifica dei tre parametri che definiremo tra poco.

Nella **Figura 5.1** si può vedere lo schema di quanto detto sopra. La posizione dell'eclittica effettiva per il momento t_A , è rappresentata sulla sfera celeste il cui centro è nel punto O . I rispettivi punti dell'equinozio di primavera e di autunno sono stati segnati sull'eclittica con una Q e una R . Il punto P rappresenta il Polo Nord dell'eclittica. Il punto E rappresenta la posizione di una data stella. Come abbiamo già menzionato, tutti gli errori di gruppo per un gruppo stellare fissato nella latitudine dell'eclittica creata dal compilatore del catalogo, può essere considerato senza eccezioni come derivante dal calcolo errato del polo dell'eclittica, ovvero è risultato dal fatto che il compilatore usò un punto sbagliato come polo: P_A invece che P .

Questo punto corrisponde all'eclittica perturbata che nella **Figura 5.1** viene indicata come l'eclittica del catalogo. La sua posizione può essere determinata in un solo modo dopo aver definito i seguenti due parametri: in primo luogo, l'angolo γ tra le linee OP e OP_A , ossia proprio lo stesso angolo piano tra i piani dell'eclittica effettiva e l'eclittica del catalogo. In secondo luogo, dobbiamo calcolare l'angolo φ tra la linea dell'equinozio RQ e la linea CD che risulta dall'intersezione del piano dell'eclittica effettiva con quello dell'eclittica del catalogo. Questa parametrizzazione è utile per scopi analitici. Tuttavia, insieme a φ utilizzeremo anche il valore β che può essere interpretato come segue (vedere la **Figura 5.1**). Lo spostamento dell'eclittica può essere scomposto in due rotazioni: una attorno all'asse equinoziale RQ uguale all'angolo γ , l'altra attorno all'asse che si trova anche all'interno del piano dell'eclittica, è perpendicolare all'asse RQ ed è uguale all'angolo β . Per cui, β indica la lunghezza dell'arco Q_AQ che riguarda la circonferenza grande che attraversa il polo P_A e il punto Q . Il significato astronomico del punto Q_A è abbastanza chiaro. È il punto dell'equinozio primaverile sull'eclittica del catalogo. È ovvio che gli angoli γ e φ definiscono in modo inequivocabile gli angoli γ e β ; tuttavia, è vero anche il contrario. La relazione desiderata può essere determinata dalla considerazione del triangolo rettangolo sferico CQ_AQ . L'angolo nel vertice Q_A è retto, l'angolo sul vertice C è uguale a γ , mentre la lunghezza dell'arco CQ è uguale a β . Il risultato è il seguente:

$$\sin \beta = \sin \gamma \sin \varphi \quad (5.2.1)$$

Il terzo grado di libertà è definito dalla rotazione della sfera attorno all'asse $P_A P'_A$, vedi la **Figura 5.1**. Tuttavia, questa rotazione interessa solo le longitudini stellari, lasciando intatte le latitudini. Pertanto, non dovremo prendere in considerazione questo grado di libertà. Facciamo notare che al posto dei parametri specificati potremmo scegliere qualsiasi altra serie di parametri base che definiscono la rotazione della sfera. Ovviamente, questo non potrà influenzare l'ulteriore sviluppo concettuale del nostro metodo.

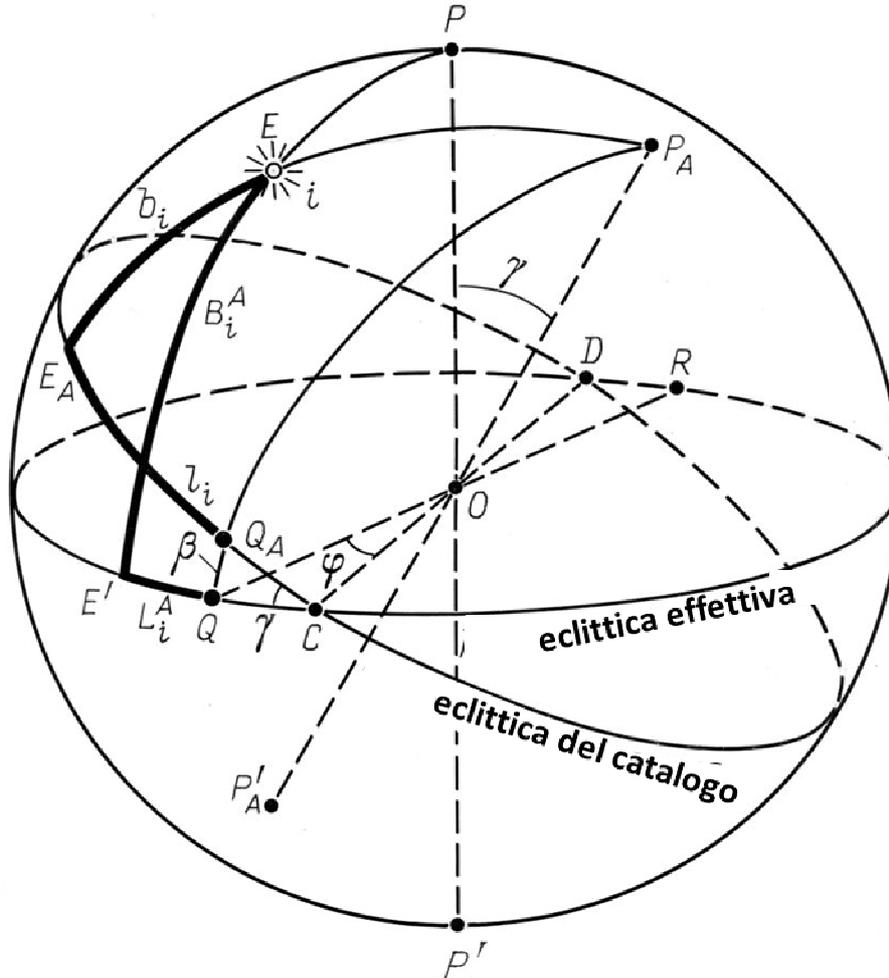


Figura 5.1. I parametri che definiscono l'errore sistematico.

Ora proviamo a studiare la distorsione delle coordinate effettive della stella i influenzate da un errore sistematico di questo tipo. La latitudine effettiva B_i^A e la latitudine L_i^A della stella sono uguali alle lunghezze degli archi EE' e QE' , contate rispettivamente in senso orario come viste dal polo P . La rispettive latitudine e longitudine distorte b_i e l_i sono pari alle lunghezze dell'arco EE_A e Q_AE_A . Tenete presente che le latitudini delle stelle le cui longitudini effettive sono maggiori della latitudine del punto D e minori di quelle del punto C , si riducono, mentre le altre latitudini aumentano, vedi la **Figura 5.1**. Ad onor del vero, questo corollario non si applica a tutte le stelle. È falso per quelle situate a una distanza angolare di γ , o inferiore, dai poli P e P' . Tuttavia, poiché il valore di γ è tutt'altro che grande, ci sono pochissime stelle nelle quali si può trovare un'area così piccola. Praticamente non ce n'è nessuna nel catalogo dell'*Almagesto*. Come vedremo, il valore di γ equivale a circa $20'$.

Tenendo presente che il valore di γ è piccolo, si può suggerire la seguente formula approssimativa per la discrepanza latitudinale:

$$\Delta B_i^A = \gamma \cdot \sin(L_i^A + \varphi). \quad (5.2.2)$$

In altre parole, l'errore sistematico nella stima della latitudine stellare può essere rappresentata con la sinusoide che si vede nella **Figura 5.2**. È molto simile alla curva scoperta in precedenza da Peters e Knobel ([1339]) mentre stavano elaborando i dati del catalogo dell'*Almagesto*. Il tasso di errore della formula 5.5.2 non supera $1'$ per le stelle il cui $|b_A| \leq 80^\circ$ e pertanto non ha importanza per noi. Per cui prenderemo in considerazione la formula 5.2.1 che è assolutamente precisa. Per correttezza escluderemo da ulteriori considerazioni le stelle i cui valori latitudinali assoluti superano gli 80

gradi. Faremo riferimento all'errore sistematico di seguito, poiché i metodi descritti sono validi solo partendo dal presupposto di prendere in considerazione un grande gruppo di stelle. La verifica se discrepanza rilevata coincide o meno con gli errori di gruppo per le singole costellazioni, è un problema a parte. La sua applicazione nell'*Almagesto* sarà considerata più avanti nel Capitolo 6.

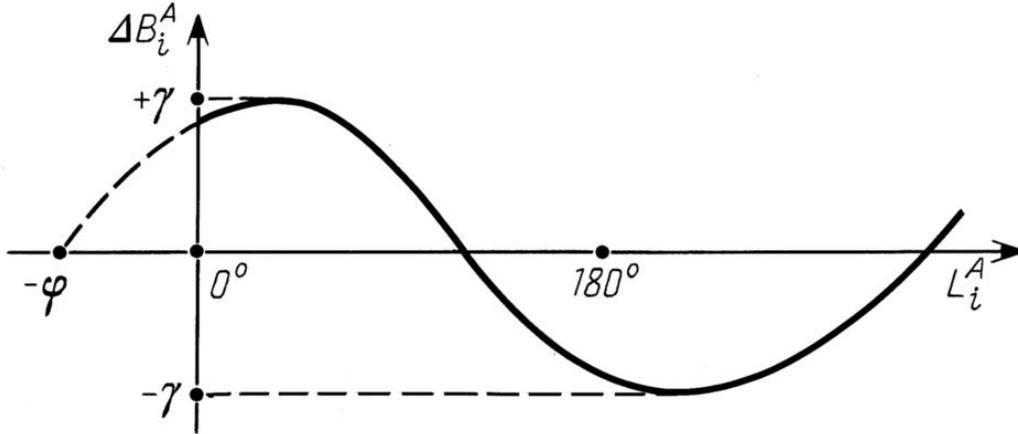


Figura 5.2. La dipendenza tra la discrepanza sistematica latitudinale e quella longitudinale.

Supponendo che il tempo t_A della compilazione del catalogo sia noto, possiamo calcolare i parametri γ e φ che definiscono l'errore sistematico, come segue:

- 1) Calcoleremo le effettive latitudini B_i^A e longitudini L_i^A per tutte le stelle del gruppo in esame (corrispondenti al momento t_A).
- 2) Dopodiché dobbiamo trovare i valori dei parametri γ^* e φ^* che ci portano alla soluzione del problema in questione.

$$\sigma^2(\gamma^*, \varphi^*) \rightarrow \min, \quad (5.2.3)$$

dove

$$\sigma^2(\gamma, \varphi) = \sum (B_i^A - b_i - \gamma \sin(L_i^A + \varphi))^2.$$

Se non ci fossero altri errori nel catalogo ad eccezione di quelli sistematici, la relazione 5.2.3 si trasformerebbe nell'equazione $\sigma^2(\gamma^*, \varphi^*) = 0$. Tuttavia, la presenza di errori casuali nelle coordinate stellari rende il valore minimo di 5.2.3 diverso da zero.

Nella nostra situazione, il momento t_A della compilazione del catalogo rimane sconosciuto; pertanto, dobbiamo calcolare gli errori sistematici per tutti i valori possibili di t nell'intervallo $0 \leq t \leq 25$ in esame, vale a dire che la posizione dell'eclittica effettiva e l'asse dell'equinozio vengono calcolati per ogni valore di t . Quindi, proprio come si vede nella **Figura 5.1**, sono stati introdotti i parametri $\gamma = \gamma(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ e $\beta = \beta(t)$; definiscono le posizioni relative dell'eclittica del catalogo e dell'eclittica per l'epoca t . I valori di $\gamma(t)$ e $\varphi(t)$ costituiscono la soluzione del problema

$$\sigma^2(\gamma(t), \varphi(t), t) \rightarrow \min, \quad (5.2.4)$$

dove

$$\sigma^2(\gamma, \varphi, t) = \sum (\Delta B_i(t) - \gamma \sin(L_i(t) + \varphi))^2. \quad (5.2.5)$$

Ancora una volta, se questo caso fosse quello ideale (senza altre discrepanze tranne l'errore sistematico inerente al catalogo), la relazione 5.2.4 potrebbe essere trascritta con la seguente equazione (ignorando gli effetti minimi del moto proprio della stella): $\sigma^2(\gamma(t), \varphi(t), t) = 0$.

Per quanto riguarda gli effetti del moto proprio, ricordiamo ai lettori che la quantità delle stelle visibilmente mobili sulla sfera celeste è molto piccola rispetto al numero totale delle stelle dell'*Almagesto*. La soluzione di quest'ultima equazione potrebbe esistere per tutti i valori di t ; tuttavia, queste equazioni potrebbero non consentirci di calcolare la data t_A . Sarebbe ancora più impossibile calcolarla dal rapporto 5.2.4 che funge da sostituto per l'equazione in questione, qualora si prendesse in considerazione un catalogo effettivo contenente degli errori casuali. Possiamo semplicemente calcolare l'errore sistematico come una funzione della presunta datazione t . Questo errore dipende naturalmente dalla presunta datazione dovuta alla fluttuazione dell'eclittica nel corso del tempo. È proprio per questo che non ci stiamo riferendo alla datazione del catalogo, ma piuttosto alla deduzione del suo errore sistematico in funzione della presunta datazione t .

Il catalogo effettivo contiene degli errori casuali oltre agli errori sistematici indicati. Pertanto, le discrepanze $B_i(t) - B_i$ sono casuali e i loro valori sono sparsi attorno alla curva sinusoidale del loro valore medio come si vede nella **Figura 5.2**. Supponendo che, a parte quelli sistematici, altri errori del catalogo siano di natura casuale, il problema del calcolo di $\gamma(t)$ e $\varphi(t)$ è quello della determinazione dei parametri di regressione.

3. Il calcolo dei parametri $\gamma(t)$ e $\varphi(t)$ con il metodo dei minimi quadrati.

Cerchiamo di trovare la soluzione per il problema della minimizzazione 5.2.4 e 5.2.5 espresso con $\gamma(t)$ e $\varphi(t)$. Negli esempi riportati qui sotto, questo problema verrà preso in considerazione per i gruppi contenenti quantità differenti di stelle. Pertanto, per i nostri calcoli utilizzeremo i seguenti valori standardizzati, nei quali N definirà la quantità di stelle nel gruppo in esame.

$$\begin{aligned}\sigma_0^2(\gamma, \varphi, t) &= \frac{1}{N} \sigma^2(\gamma, \varphi, t), \\ s_b(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta B_i(t) \sin L_i(t), \\ c_b(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta B_i(t) \cos L_i(t), \\ s_2(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2 L_i(t), \\ c_2(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos^2 L_i(t), \\ d(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin L_i(t) \cos L_i(t).\end{aligned}$$

Facciamo notare che tutti questi valori possono essere calcolati per ogni momento t , a seconda dei valori delle coordinate stellari moderne e delle coordinate stellari nel catalogo dell'*Almagesto*.

Ovviamente, il problema di minimizzazione 5.2.4 è equivalente al problema di minimizzazione

$$\sigma_0^2(\gamma, \varphi, t) \rightarrow \min, \quad (5.3.1)$$

nel senso che i parametri $\gamma(t)$ e $\varphi(t)$ definiti dalla relazione 5.3.1 coincidono con i parametri definiti dalla soluzione del problema 5.2.4.

Come abbiamo già sottolineato, la soluzione del problema 5.3.1 ha senso solo per i grandi gruppi stellari, ma dal momento che dobbiamo studiare le proprietà statistiche della seguente qui sotto, d'ora in poi utilizzeremo $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ per fare riferimento ai valori che soddisfano la relazione 5.3.1.

Il valore di

$$\sigma_{min}(t) = \sigma_0(\gamma_{stat}(t), \varphi_{stat}(t), t) \quad (5.3.2)$$

è piuttosto trasparente dal punto di vista della fisica. Si tratta della discrepanza latitudinale media quadratica applicata al gruppo di stelle studiate per il momento t , risultante dalla compensazione dell'errore sistematico scoperto in $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$. Come vedremo di seguito, il valore di $\sigma_{min}(t)$ non dipende affatto dal tempo, a causa della velocità estremamente bassa del moto proprio della maggior parte delle stelle. Pertanto utilizzeremo anche l'indicazione σ_{min} . Tenete presente che la discrepanza latitudinale media quadratica precedente alla compensazione di questo errore sarebbe pari al seguente valore del momento t :

$$\sigma_{iniz} = \sigma_0(0,0, t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta B_i(t))^2}, \quad (5.3.3)$$

Pertanto, la differenza $\Delta\sigma(t) = \sigma_{iniz}(t) - \sigma_{min}(t)$ stima l'effetto di compensazione dell'errore sistematico $\gamma_{stat}(t)$, $\varphi_{stat}(t)$.

Più avanti, quando definiremo i valori di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ dalla relazione 5.3.1, ipotizzeremo che il momento temporale t sia da fissare. Pertanto, ometteremo l'argomento t dai nostri calcoli, vale a dire che useremo L_i al posto di $L_i(t)$, s_b al posto di $s_b(t)$, ecc...

Per trovare il valore minimo nella relazione 5.3.1, prenderemo le derivate parziali delle funzioni $\sigma_0^2(\gamma, \varphi, t)$ da γ e φ e le faremo diventare pari a zero. Tenendo a mente la formula $\sin(L_i + \phi) = \sin L_i \cos \phi + \cos L_i \sin \phi$, finiremo con le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} s_b \cos \varphi + c_b \sin \varphi &= \\ = \gamma [s_2 \cos^2 \varphi + 2d \cos \varphi \sin \varphi + c_2 \sin^2 \varphi], \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} -c_b \cos \varphi + s_b \sin \varphi &= \\ = \gamma [-d \cos 2\varphi + (s_2 - c_2) \cos \varphi \sin \varphi + d \sin^2 \varphi]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Se dividessimo l'equazione 5.3.4 con la 5.3.5, otterremmo

$$\frac{s_b + c_b \tan \varphi}{-c_b + s_b \tan \varphi} = \frac{s_2 + 2d \tan \varphi + c_2 \tan^2 \varphi}{-d + (s_2 - c_2) \tan \varphi + d \tan^2 \varphi}$$

Dopo aver trasformato entrambe le parti di questa equazione in un denominatore comune, arriveremo alla seguente equazione riguardante $\tan \varphi$:

$$(1 + \tan^2 \varphi)(c_b s_2 - s_b d) + (1 + \tan^2 \varphi) \tan \varphi (c_b d - s_b c_2) = 0.$$

Ciò semplifica il calcolo della tangente del valore ottimale di φ_{stat} :

$$\tan \varphi_{stat} = \frac{s_b d - c_b s_2}{c_b d - s_b c_2}. \quad (5.3.6)$$

L'equazione 5.3.6 consente una determinazione unica di φ_{stat} ; dopodiché, il valore ottimale di γ_{stat} potrà essere dedotto dalla 5.3.4, ad esempio:

$$\begin{aligned}
\gamma_{stat} &= \\
&= \frac{s_b \cos\varphi_{stat} + c_b \sin\varphi_{stat}}{s_2 \cos^2 \varphi_{stat} + 2d \cos\varphi_{stat} \sin\varphi_{stat} + c_2 \sin^2 \varphi_{stat}} = \\
&= \frac{\sqrt{c_b d - 2s_b c_b d + c_b^2 s_2^2}}{d^2 - s_2 c_2}.
\end{aligned}
\tag{5.3.7}$$

Le formule 5.3.6 e 5.3.7 rendono possibile la ricerca della soluzione desiderata per il problema del calcolo delle stime per φ_{stat} e γ_{stat} con il metodo dei minimi quadrati.

Sarebbe opportuno condurre un'analisi sensibile a questo problema. Consideriamo il secondo ordine delle derivate parziali della funzione $\sigma^2(\gamma, \varphi, t)$ rispetto a γ e φ :

$$\begin{aligned}
a_{11}(t) &= \left. \frac{\partial^2 \sigma^2(\gamma, \varphi, t)}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_{stat}(t), \varphi=\varphi_{stat}(t)} \\
a_{12}(t) &= \left. \frac{\partial^2 \sigma^2(\gamma, \varphi, t)}{\partial \gamma \partial \varphi} \right|_{\gamma=\gamma_{stat}(t), \varphi=\varphi_{stat}(t)} \\
a_{22}(t) &= \left. \frac{\partial^2 \sigma^2(\gamma, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right|_{\gamma=\gamma_{stat}(t), \varphi=\varphi_{stat}(t)}
\end{aligned}$$

Tenendo a mente le equazioni 5.3.4-5.3.7 possiamo facilmente determinare le seguenti espressioni per queste derivate parziali:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2(\cos^2 \varphi_{stat} + 2d \cos\varphi_{stat} \sin\varphi_{stat} + c_2 \sin^2 \varphi_{stat}) = \\
&= (2/\gamma_{stat})(s_b \cos\varphi_{stat} + c_b \sin\varphi_{stat}), \\
a_{12} &= 2(c_b \cos\varphi_{stat} - s_b \sin\varphi_{stat}), \\
a_{22} &= 2\gamma_{stat}^2 (s_2 \sin^2 \varphi_{stat} - 2d \sin\varphi_{stat} \cos\varphi_{stat} + c_2 \cos^2 \varphi_{stat}).
\end{aligned}
\tag{5.3.8}$$

Per poter stimare gli errori nel calcolo del tasso dell'errore medio quadratico $\sigma(\gamma, \varphi, t)$ considerando l'aberrazione dei valori γ e φ rispetto ai valori ottimali calcolati φ_{stat} e γ_{stat} , utilizziamo la seguente decomposizione della funzione $\sigma^2(\gamma, \varphi, t)$ per la vicinanza del punto $(\gamma(t), \varphi(t))$:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\gamma, \varphi, t) &\approx \sigma_{min}^2 + a_{11}(t)(\gamma - \gamma_{stat}(t))^2 + \\
&+ 2a_{12}(t)(\gamma - \gamma_{stat}(t))(\varphi - \varphi_{stat}(t)) + a_{22}(t)(\varphi - \varphi_{stat}(t))^2.
\end{aligned}
\tag{5.3.9}$$

Nell'ultima formula abbiamo ignorato i termini di magnitudine pari e superiori a tre, come riferito per le differenze $\gamma - \gamma_{stat}(t)$ e $\varphi - \varphi_{stat}(t)$.

La formula (5.3.9) consente una stima elementare della sensibilità dell'errore medio quadratico $\sigma(\gamma, \varphi, t)$ per la variazione dei parametri γ e φ . Per questo scopo è sufficiente determinare i valori a_{11} , a_{12} e a_{22} pertinenti alla parte corretta di 5.3.9, che dopo la stima di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ possono essere facilmente calcolati con la formula 5.3.8.

La formula 5.3.9 dimostra che le “curve di livello” degli errori medi quadratici si manifestano come delle ellissi sul piano (γ, φ) , vedi la **Figura 5.3**. Il centro delle ellissi è nel punto $(\gamma_{stat}, \varphi_{stat})$ per il quale il valore dell'errore medio quadratico è uguale a σ_{min} . La direzione degli assi dell'ellittica e la relazione tra loro sono determinate dalle formule standard di geometria analitica attraverso i valori a_{11} , a_{12} e a_{22} , vale a dire che l'angolo di inclinazione α di uno degli assi dell'ellisse è determinato dalla seguente relazione:

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} + a_{22}}.$$

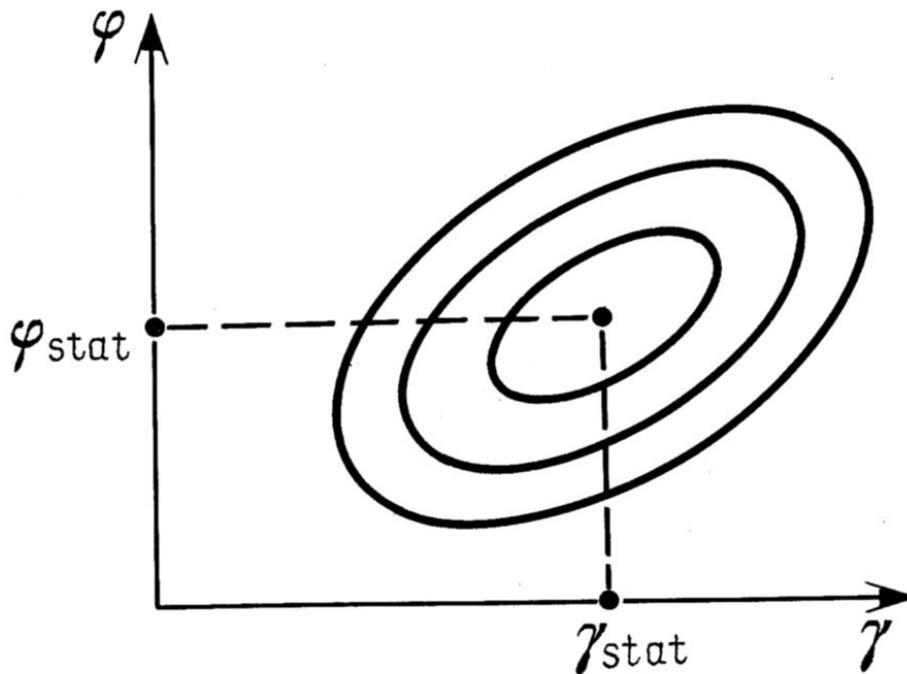


Figura 5.3. Le curve di livello dell'errore medio quadratico $\sigma(\gamma, \varphi, t)$, dove t è un valore fisso.

Il secondo asse è perpendicolare al primo. Le lunghezze degli assi si relazionano l'una all'altra con λ_1/λ_2 , dove λ_1 e λ_2 sono le radici dell'equazione quadratica

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

4. La variazione dei parametri $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ nel corso del tempo.

Prima abbiamo ipotizzato che il momento t è fisso. Consideriamo ora in che modo lo scorrere del tempo influenzi il comportamento dei valori calcolati γ_{stat} e φ_{stat} .

Questo comportamento può essere determinato dalle formule riportate nel paragrafo precedente. Queste formule contengono i valori $L_i(t)$ e $B_i(t)$ che definiscono la dipendenza temporale di γ_{stat} e φ_{stat} . I cambiamenti delle longitudini ($L_i(t)$) e delle latitudini ($B_i(t)$) nel corso del tempo sono stati studiati abbastanza bene, vedere il Capitolo 1. I rispettivi calcoli erano di natura abbastanza complessa e hanno richiesto l'uso del computer per un calcolo quantitativo della stima della dipendenza temporale di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$, vedere il Capitolo 6 dove analizzeremo semplicemente il comportamento qualitativo all'interno di queste funzioni.

Prendiamo in considerazione ancora una volta la sfera celeste, ipotizzando per semplicità che tutte le stelle là sopra siano immobili, tornando così alle concezioni di Tolomeo, anche se solo per

semplificare l'argomentazione e i calcoli. Possiamo benissimo farlo poiché la percentuale delle stelle con velocità notevole di moto proprio (quelle che si muovono di diversi gradi d'arco nel corso dell'intervallo temporale di 2500 anni preso in esame) è relativamente basso. Quelle stelle influiscono difficilmente sul calcolo dei parametri $\gamma_{star}(t)$ e $\varphi_{star}(t)$ di cui ci stiamo occupando ora.

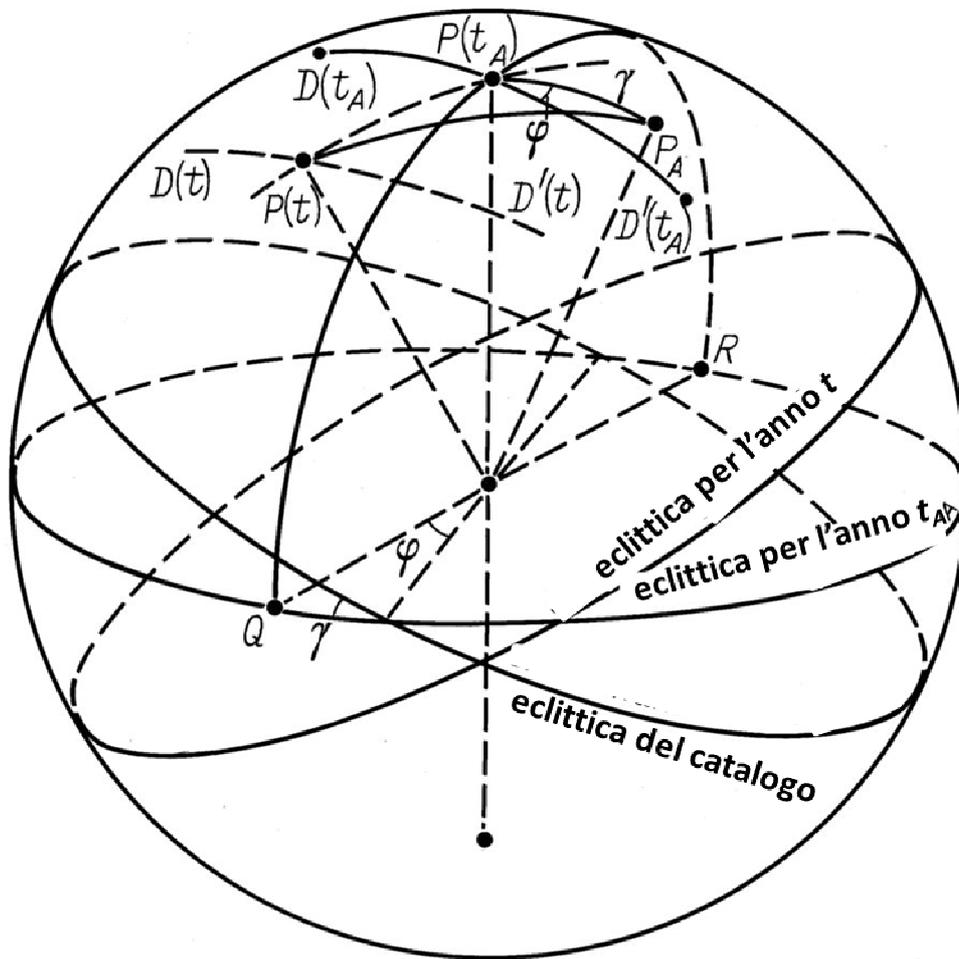


Figura 5.4. Definizione geometrica degli angoli φ e γ sulla sfera celeste.

Nella **Figura 5.4** si può vedere sia la sfera celeste che l'eclittica effettiva per la compilazione del catalogo nell'epoca t_A . Sarebbe opportuno confrontare le **Figure 5.1** e **5.4**. Nell'epoca t_A che a noi resta sconosciuta, il polo dell'eclittica $P(t_A)$ occupava una certa posizione sulla sfera celeste. Ovviamente, il compilatore del catalogo non fu idealmente preciso nell'indicazione dell'eclittica sulla sfera celeste. Pertanto il polo P_A della sua "eclittica del catalogo" assunse una posizione diversa da quella di $P(t_A)$.

Disegniamo l'arco di un grande cerchio che collegherà il polo $P(t_A)$ con i rispettivi punti Q e R dell'equinozio primaverile e autunnale. Inoltre, disegneremo l'arco del grande cerchio $D(t_A)D'(t_A)$ che passerà attraverso $P(t_A)$ e attraverserà l'arco di recente costruzione $QP(t_A)R$ nell'angolo retto del punto $P(t_A)$. Se conoscessimo la data t_A , il metodo dei minimi quadrati descritto nel paragrafo 3 ci darebbe l'opportunità di trovare i parametri γ e φ che definiscono la disposizione in comune dell'eclittica per l'epoca t_A e l'eclittica del catalogo. La **Figura 5.4** dimostra che proprio questi angoli definiscono anche la disposizione reciproca dei poli $P(t_A)$ e P_A sulla sfera celeste, vale a dire che il valore di γ è uguale alla lunghezza dell'arco $P(t_A)P_A$ nei valori dell'arco, mentre l'angolo φ è pari all'angolo $P_A P(t_A) D'(t_A)$. Come abbiamo sottolineato nel Capitolo 1, la posizione celeste dell'eclittica si altera nel corso del tempo. Si tratta della manifestazione dell'effetto di fluttuazione

dell'eclittica. Perciò, il polo dell'eclittica per il momento t che differisce da t_A , dovrà essere situato nel punto $P(t)$ che differirà anch'esso da $P(t_A)$.

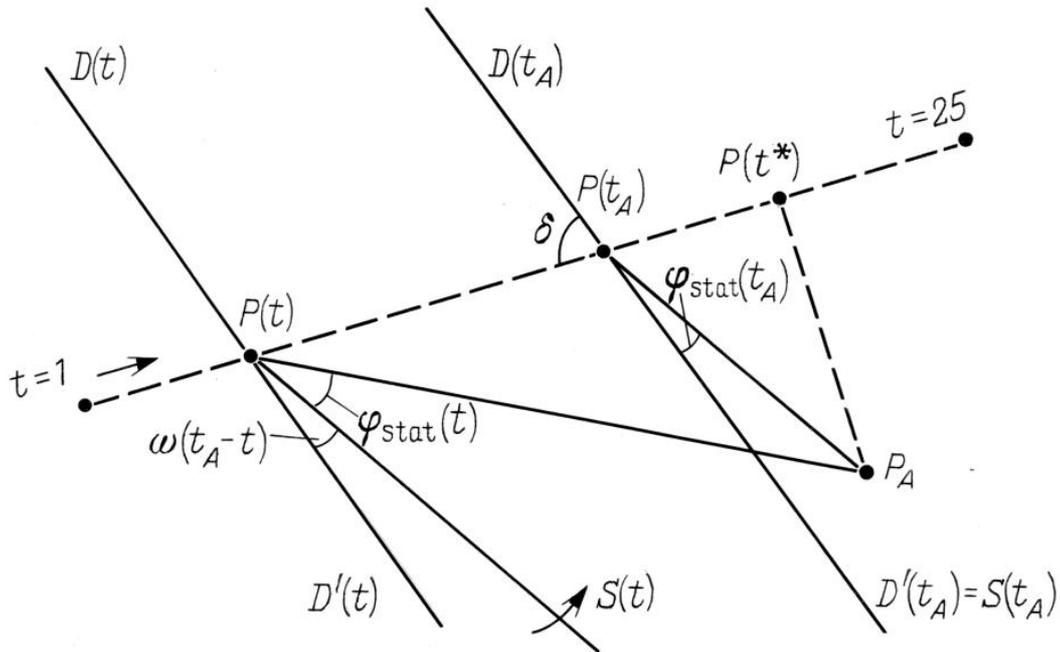


Figura 5.5. Il calcolo della dipendenza temporale qualitativa di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t_A)$.

Nella **Figura 5.4** la traiettoria del polo dell'eclittica sulla sfera celeste è indicata con una linea tratteggiata, quella che attraversa i punti $P(t)$ e $P(t_A)$. Pertanto, per poter abbinare l'eclittica dell'epoca t al catalogo dell'eclittica, si devono sovrapporre l'uno sull'altro i poli P_A e $P(t)$. La lunghezza dell'arco $P(t)P_A$ è pari al valore di $\gamma_{stat}(t)$, mentre la posizione dell'asse di rotazione dell'eclittica che fornisce la sovrapposizione può essere parametrizzata dall'angolo $P_AP(t)D'(t)$ dove l'arco $D(t)D'(t)$ è “parallelo” all'arco $D(t_A)D'(t_A)$.

Per poter meglio comprendere il comportamento quantitativo delle funzioni $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$, usiamo un disegno bidimensionale che raffigura solo gli spostamenti dei poli dell'eclittica. E' consentito poiché si sa a priori che i valori dei loro spostamenti rientrano nello spazio di un grado. Dobbiamo quindi fare una copia bidimensionale della parte polare della **Figura 5.4**: vedi la **Figura 5.5**.

Come appare evidente dalla **Figura 5.5**, il polo effettivo dell'eclittico si sposta nel corso del tempo a causa delle fluttuazioni dell'eclittica. Per l'intervallo in esame il valore di questo spostamento equivale a soli 25' di media, per cui possiamo disegnarlo come una linea retta (vedi la linea tratteggiata nella **Figura 5.5**). Il moto del polo dell'eclittica lungo questa linea può essere considerato uniforme con un grado abbastanza alto di precisione. Quindi, la distanza tra i poli $P(t)$ e $P(t_A)$, ad esempio, dovrà essere uguale a $v(t_A - t)$, dove v è la velocità di moto del polo dell'eclittica. Questa velocità si avvicina a 0,01' all'anno. Come abbiamo detto in precedenza, nell'epoca di osservazione t_A il compilatore del catalogo ha commesso un errore nella stima del piano dell'eclittica, che ha provocato lo spostamento del polo dell'eclittica del catalogo nel punto P_A , che differisce da $P(t_A)$. Ciò dovrebbe risultare nella perpendicolare tra P_A e la traiettoria del moto del polo dell'eclittica la attraversa nel punto $t^* > t_A$. Come nel caso della **Figura 5.5**, questo errore del compilatore aggiungerà ovviamente un'età extra all'eclittica del catalogo, vale a dire che la farà corrispondere meglio all'eclittica dell'anno t^* . Avviene il contrario se questa perpendicolare attraversa la traiettoria nel punto $t^* < t_A$; in questo caso l'errore dell'autore renderebbe il catalogo “più recente”. Per dare ai lettori un'impressione delle vero valore delle correlazioni, indicheremo che nell'*Almagesto* la distanza tra i poli dell'eclittica $P(0)$ per il 1900 d.C. e $P(19)$ per l'inizio

dell'era dopo Cristo, equivale approssimativamente a 20', un valore che si avvicina a quello dell'errore $\gamma_{stat}(t_A)$.

In precedenza abbiamo menzionato che il valore $\gamma_{stat}(t_A)$ era pari alla lunghezza del segmento $P(t_A)P_A$, mentre $\varphi_{stat}(t_A)$ era uguale all'angolo $P_AP(t_A)D'(t_A)$. Analogamente, $\gamma_{stat}(t) = \overline{P(t)P_A}$. La linea orizzontale superiore si riferisce alla lunghezza del segmento. Tuttavia, l'angolo $P_AP(t)D'(t)$ non è uguale a $\varphi_{stat}(t)$, in quanto nel momento t l'asse dell'equinozio di primavera si sposterà per il valore di $\omega(t_A - t)$.

Qui ω rappresenta la velocità angolare annuale della precessione che approssimativamente è pari a 50", vedere il Capitolo 1. Questo spostamento corrisponde al valore dell'angolo $D'(t)P(t)S(t)$ nella **Figura 5.5**. Pertanto, $\varphi_{stat}(t)$ è uguale all'angolo $P_AP(t)S(t)$, dove l'angolo $D'(t)P(t)S(t) = \omega(t_A - t)$.

Per evitare le indicazioni molto ingombranti, presumiamo che

$$x(t) = \overline{P(t)P(t_A)}, \quad y = \overline{P(t_A)P(t^*)}, \quad z = \overline{P_AP(t^*)},$$

$$\psi(t) = \angle P_AP(t)D'(t), \quad \delta = \angle D(t_A)P(t_A)P(t).$$

Il valore di $\gamma_{stat}(t_A)$ può essere descritto come l'errore di stima dell'eclittica; nell'*Almagesto* ha un ordine di 20'. L'angolo δ non dipende da t ed è pari all'angolo tra la direzione del moto del polo dell'eclittica e la linea $D(t_A)D'(t_A)$ stimato sopra. È ovvio che

$$z = \gamma_{stat}(t_A) \sin(\delta - \varphi_{stat}(t_A)),$$

$$y = \gamma_{stat}(t_A) \cos(\delta - \varphi_{stat}(t_A)).$$

Poiché $x(t) = v(t_A - t)$, dalla **Figura 5.5** abbiamo

$$\gamma_{stat}(t) = \sqrt{(v(t_A - t) + y)^2 + z^2} =$$

$$= \sqrt{\gamma_{stat}^2(t_A) + 2yv(t_A - t) + v^2(t_A - t)^2}.$$

(5.4.1)

Ovviamente, il valore minimo di questa funzione viene raggiunto con $t = t^*$. Se stessimo studiando il caso di $|t - t_A| \ll |t_A - t^*|$, la funzione di $\gamma_{stat}(t)$ si comporterebbe quasi come se fosse lineare:

$$\gamma_{stat}(t) \approx \gamma_{stat}(t_A) + v \cos(\delta - \varphi_{stat}(t_A))(t_A - t).$$

La funzione $\varphi_{stat}(t)$ è anche comoda per trovare:

$$\varphi_{stat}(t) = \delta + \omega(t_A - t) - \arctan\left(\frac{z}{y + v(t_A - t)}\right).$$

(5.4.2)

Di nuovo, se $|t - t_A| \ll |t_A - t^*|$, si potrebbe usare l'approssimazione lineare:

$$\varphi_{stat}(t) = \varphi_{stat}(t_A) + \left[\omega + \frac{v \sin(\delta - \varphi_{stat}(t_A))}{\gamma_{stat}(t_A)} \right] (t_A - t).$$

Naturalmente, le formule a cui arriviamo possono darci solo un'idea generale del carattere delle funzioni $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$. Nella **Figura 5.6** possiamo vedere una rappresentazione approssimativa di queste funzioni, ottenuta dalle formule 5.4.1 e 5.4.2. È ovvio che la loro forma effettiva dipende dal tasso di errore riguardo l'accuratezza del compilatore del catalogo, ovvero i valori di $\gamma_{stat}(t_A)$ e $\varphi_{stat}(t_A)$. Le formule 5.4.1 e 5.4.2 definiscono anche la natura della dipendenza $\beta_{stat}(t)$, vedere la formula 5.2.1.

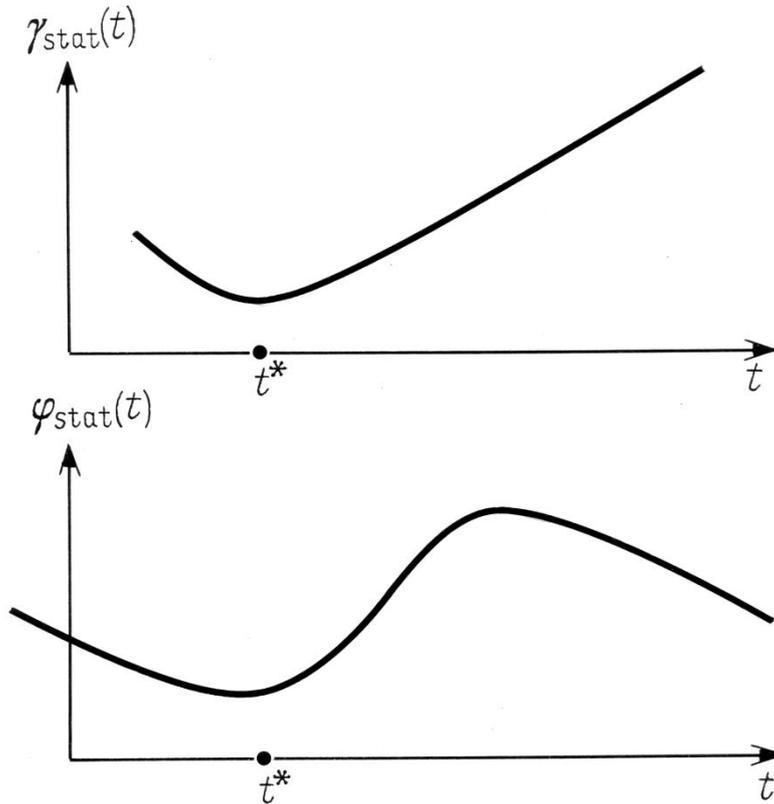


Figura 5.6. Vista approssimativa delle funzioni $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$.

Discutiamo il significato geometrico di questi calcoli. Prendiamo in considerazione le coordinate tolemaiche di alcuni gruppi stellari, presumendo che le osservazioni siano state eseguite nel momento temporale t . Quindi dobbiamo compensare l'errore sistematico $\gamma_{stat}(t)$, $\varphi_{stat}(t)$ o ruotare l'intero gruppo di un angolo $\gamma_{stat}(t)$ attorno all'asse che si trova alla distanza $\varphi_{stat}(t)$ dall'asse dell'equinozio. Supponiamo di essere stati perfettamente precisi nella stima dell'errore sistematico, per cui il polo P_A dell'eclittica del catalogo si sovrappone al polo effettivo $P(t)$. Ovviamente, tale sovrapposizione non renderà pari a zero le discrepanze latitudinali delle stelle, poiché il catalogo contiene anche degli errori casuali. Tuttavia, questi errori non influenzano la posizione del polo dell'eclittica in quanto hanno un valore medio nullo, o piuttosto lo influenzano in misura molto ridotta, che è inversamente proporzionale alla quantità del gruppo di stelle oggetto di studio.

Nella **Figura 5.5** possiamo vedere che c'è un solo modo possibile per cui lo spostamento del polo P_A verso il punto $P(t)$ può essere scomposto in due spostamenti: da P_A a $P(t_A)$ e da $P(t_A)$ a $P(t)$. I parametri $\gamma_{stat}(t_A)$ e $\varphi_{stat}(t_A)$ che definiscono il primo spostamento si riferiscono all'errore dell'osservatore, vale a dire all'errore commesso dal compilatore del catalogo nella stima del piano dell'eclittica. Il secondo spostamento è definito dalla fluttuazione centenaria del piano dell'eclittica, che può essere calcolata dalla teoria di Newcomb.

Tutto quanto sopra implica anche il seguente corollario. Contrassegniamo con $\Delta B_i(t)$ la discrepanza latitudinale della stella calcolata i per il momento presunto di osservazione t , mentre la stessa discrepanza per il momento t dopo la compensazione dell'errore sistematico, sarà descritta con $\Delta B_i^0(t) = \Delta B_i(t) - \gamma_{stat}(t) \sin(L_i(t) + \varphi_{stat}(t))$. Quindi, i valori di $\Delta B_i^0(t)$ dovranno essere indipendenti da t e pari agli errori casuali commessi da Tolomeo nella stima delle latitudini. La situazione cambia quando entrano nel gruppo stellare in fase di studio le stelle mobili, in quanto il loro valore di $\Delta B_i^0(t)$ dipende dal tempo t . La caratteristica della dipendenza è definita dai valori dei singoli errori casuali, come pure dalla direzione della velocità di moto proprio adeguate di tutte le stelle come se fossero viste contemporaneamente. In particolare, per l'epoca sconosciuta t_A il

valore di $\Delta B_i^0(t_A)$ dovrà essere uguale all'errore casuale latitudinale per la stella i . Sarebbe naturale aspettarsi che se questa stella si muovesse abbastanza velocemente e allo stesso tempo sembri essere misurata bene, il valore di $\Delta B_i^0(t)$ dovrebbe raggiungere il suo minimo da qualche parte intorno al punto t_A . La dimensione di questo intervallo minimo dipenderà dal valore e dalla velocità del moto proprio di una data stella e sarà uguale per centinaia di anni persino per le stelle più veloci: Arturo, per esempio.

La precedente considerazione e la **Figura 5.5** hanno l'implicazione piuttosto importante che per poter determinare il polo P_A dell'eclittica del catalogo eclittico si debba solo conoscere i due valori di γ_{stat} che corrisponderanno a due rispettivi valori del momento temporale t_1 e t_2 .

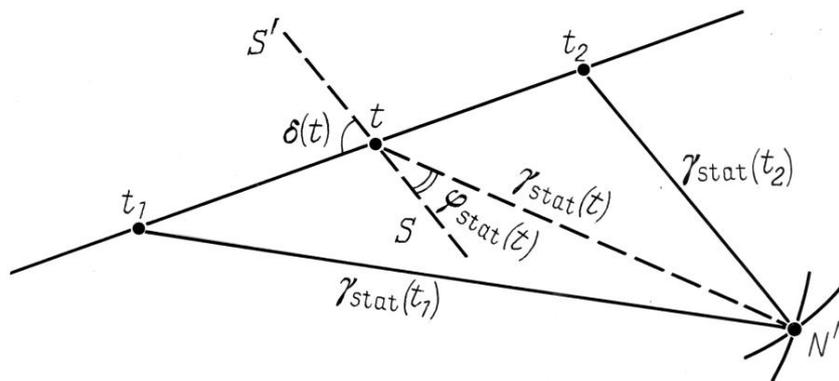


Figura 5.7. Il calcolo dei valori $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$.

In effetti, la teoria di Newcomb rende relativamente semplice determinare la velocità v del moto del polo dell'eclittica, vedere il Capitolo 1. Fissiamo i due momenti temporali t_1 e t_2 scelti arbitrariamente (vedere la **Figura 5.7**). Dobbiamo usare la formula 5.3.7 per calcolare i valori di $\gamma_{stat}(t_1)$ e $\gamma_{stat}(t_2)$. Ora disegniamo la linea del moto del polo dell'eclittica nel tempo, segnando anche i punti t_1 e t_2 . La scala che sceglieremo dovrà anche fare in modo che la distanza tra i due punti sia pari a $v|t_2 - t_1|$. La posizione del polo P_A dell'eclittica è determinata con il punto di intersezione delle due circonferenze i cui centri si trovano nei punti t_i e i cui raggi sono uguali a $\gamma_{stat}(t_i)$, $i = 1, 2$. La **Figura 5.7** mostra come si calcolano i valori di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ che corrispondono ai valori arbitrari di t . Questo angolo può anche essere calcolato con l'aiuto della teoria di Newcomb. Il significato astronomico della linea retta $S'S'$ è abbastanza ovvio: è la parte "raddrizzata" della grande circonferenza pertinente alla sfera celeste che attraversa il polo dell'eclittica $P(t)$ dell'epoca t ed è perpendicolare (a $P(t)$) a un'altra grande circonferenza che attraversa anch'essa $P(t)$ e il punto dell'equinozio dell'epoca t .

Analogamente, i calcoli dei parametri $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ per tutti i valori di t richiedono la conoscenza di due soli valori: $\varphi_{stat}(t_1)$ e $\varphi_{stat}(t_2)$.

Comunque sia, lavoreremo con l'angolo γ . È un valore conciso, in quanto è l'errore nella stima dell'angolo di inclinazione tra il piano equatoriale e il piano dell'eclittica. Facciamo notare che questo angolo può essere definito con l'uso della sfera armillare, per esempio. Perciò, l'errore γ inerente al valore di questo angolo può essere un errore strumentale della sfera armillare, vedere il Capitolo 1. Per cui, l'errore γ nasce naturalmente durante l'osservazione astronomica. A parte questo, la scelta di γ per la rappresentazione del parametro dovrà inoltre ricevere una convalida statistica.

5. Le proprietà statistiche delle stime di γ_{stat} e φ_{stat}

Ora considereremo il problema del calcolo dei parametri γ e φ che definiscono l'errore sistematico del catalogo come un problema di matematica statistica. A questo scopo, ipotizziamo quanto segue: il compilatore del catalogo ha introdotto l'errore sistematico nel momento temporale t_A ; detto errore è definito dai parametri γ_A e φ_A . A parte questo, supponiamo che la latitudine di ciascuna stella misurata sia stata influenzata dalla perturbazione casuale ξ_i con una media dello zero come risultato dell'errore di osservazione, ossia $E\xi_i = 0$. Si presume che gli errori casuali ξ_i che corrispondono a stelle diverse, siano indipendenti e distribuiti uniformemente. Mettiamo che $\sigma^2 = E\xi_i^2$ rappresenti la dispersione del valore casuale ξ_i ; in linea generale questa dispersione rimane a noi sconosciuta.

In queste presunzioni la latitudine della stella i assumerà la seguente forma:

$$b_i = B_i(t_A) - \gamma_A \sin(L_i(t_A) + \varphi_A) + \xi_i \quad (5.5.1)$$

Dal punto di vista statistico, ciò che abbiamo davanti è un campione composto da N realizzazioni di valori casuali $\{b_i\}_{i=1}^N$ della serie 5.5.1. Questo esempio deve essere utilizzato per il calcolo statistico dei parametri $\hat{\gamma}$ e $\hat{\varphi}$ di γ_A e φ_A , come pure per il calcolo del valore σ che è uguale all'equazione dell'errore medio quadratico. Dovremo localizzare immediatamente il problema e studiare le stime di $\hat{\varphi} = \varphi_{stat}$ e $\hat{\gamma} = \gamma_{stat}$ calcolate con il metodo dei minimi quadrati. Queste stime hanno la forma di 5.3.6 e 5.3.7. Gran parte della nostra attenzione deve essere rivolta verso la stima del valore γ_A per le ragioni spiegate alla fine del paragrafo 4.

La Formula 5.5.1 sembra essere tradizionale per l'analisi di regressione. In effetti, questa equazione rivendica l'errore di osservazione $\Delta b_i = B_i(t_A) - b_i$ come un valore casuale con la media $\gamma_A \sin(L_i(t_A) + \varphi_A)$ a seconda dei parametri sconosciuti γ_A e φ_A e la dispersione σ^2 . Si devono stimare i valori dei parametri sconosciuti utilizzando il metodo dei minimi quadrati e determinare le qualità statistiche delle stime ricevute. A tali condizioni, la curva $Y(x) = \gamma_A \sin(x + \varphi_A)$ di solito viene indicata come la linea di regressione.

Definiamo i valori di γ e φ usando le relazioni espresse in 5.3.6 e 5.3.7. Per presunzione, le discrepanze Δb_i sono casuali. Pertanto, anche le stime di φ_{stat} e γ_{stat} che otteniamo da queste formule sono dei valori casuali. Studiamo le loro qualità statistiche e consideriamo la loro relazione con gli effettivi valori sconosciuti di φ_A e γ_A .

Eseguiamo la sostituzione di s_b e c_b nelle formule descritte sopra, usando la differenza $\gamma_A \sin(L_i(t_A) + \varphi_A) - \xi_i$ al posto di Δb_i e applicare detta sostituzione alle formule 5.3.6 e 5.3.7. Finiremo con le seguenti espressioni per i valori φ_{stat} e γ_{stat} .

$$\tan\varphi_{stat} = \frac{\tan\varphi_A + \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i (s_2 \cos L_i(t_A) - d \sin L_i(t_A))}{\gamma_A (d^2 - s_2 c_2) \cos\varphi_A}}{1 + \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i (c_2 \sin L_i(t_A) - d \cos L_i(t_A))}{\gamma_A (d^2 - s_2 c_2) \cos\varphi_A}}. \quad (5.5.2)$$

$$\gamma_{stat} = \gamma_A - \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i (c_2 \sin L_i(t_A) - d \cos L_i(t_A))}{(s_2 + 2d \tan\varphi_A + c_2 \tan^2\varphi_A) \cos\varphi_A}. \quad (5.5.3)$$

Introduciamo il valore

$$R = (\gamma_A (d^2 - s_2 c_2) \cos\varphi_A)^{-1}.$$

In questo caso 5.5.2 può essere trascritta con

$$\tan\varphi_{stat} = \frac{\tan\varphi_A + \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i (s_2 \cos L_i(t_A) - d \sin L_i(t_A))}{1 + \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i (c_2 \sin L_i(t_A) - d \cos L_i(t_A))} \quad (5.5.4)$$

La condizione $E\xi_i = 0$ ci dice che la stima del parametro γ_{stat} ricevuta non si è spostata, ovvero:

$$E\gamma_{stat} = \gamma_A. \quad (5.5.5)$$

La dispersione per la stima di γ_{stat} espressa attraverso D_γ sembra una cosa così:

$$D_\gamma = \frac{\sigma^2}{N(\cos^2\varphi_A s_2 + 2d \cos\varphi_A \sin\varphi_A + c_2 \sin^2\varphi_A)}. \quad (5.5.6)$$

Se gli errori di osservazione ξ_i sono distribuiti normalmente, lo stesso vale per il valore γ_{stat} e i primi due momenti (5.5.5 e 5.5.6) definiscono tutta la sua distribuzione. Questo fatto ci darà l'opportunità di costruire un intervallo di confidenza per il valore di γ_A .

L'analisi della stima di φ_{stat} è un po' più complessa. Usiamo l'equazione resa dalla formula 5.5.4:

$$\begin{aligned} \tan\varphi_{stat} - \tan\varphi_A &= \\ &= \frac{\frac{R}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i ((s_2 + d \tan\varphi_A) \cos L_i(t_A) - (d + c_2 \tan\varphi_A) \sin L_i(t_A))}{1 + \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i (c_2 \sin L_i(t_A) - d \cos L_i(t_A))}. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

così come il fatto che per I grandi valori di N , il secondo oggetto nel denominatore della parte destra di 5.5.7 è un piccolo valore. Questo valore è davvero di natura casuale, con una media nulla e una dispersione di

$$\frac{\sigma^2 c_2}{N \gamma_A^2 (s_2 c_2 - d^2) \cos^2 \varphi_A}.$$

Se i valori di ξ_i sono distribuiti normalmente, lo stesso vale per il valore in esame. Per l'*Almagesto* ha le seguenti implicazioni: persino per $N = 30$ la probabilità P_N che il denominatore della parte destra di 5.5.7 possa essere negativo non supera 5×10^{-3} . Questa probabilità diminuisce drasticamente con la crescita di N : $P_{50} \leq 2,5 \times 10^{-4}$, $P_{80} \leq 4 \times 10^{-6}$, $P_{100} \leq 3 \times 10^{-7}$, $P_{200} \leq 8 \times 10^{-13}$, $P_{300} \leq 2,5 \times 10^{-8}$.

In linea generale la formula 5.5.7 implica che $E \tan \varphi_{stat} \neq \tan\varphi_A$. Tuttavia, possiamo facilmente ottenere la funzione di distribuzione $F(x)$ del valore casuale $\tan \varphi_{stat} - \tan\varphi_A$ da questa formula di cui abbiamo bisogno per stimare l'intervallo di confidenza per φ_A . Infatti, se dovessimo ignorare il caso piuttosto improbabile del denominatore che in 5.5.7 diventa negativo, potremmo estrarre l'espressione $F(x)$ da questa formula:

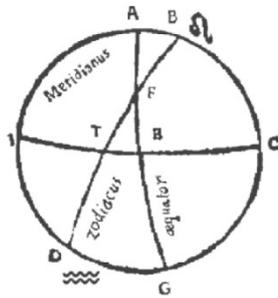
$$F(x) = P(\tan \varphi_{stat} - \tan \varphi_A < x) = P(\eta_x - x),$$

dove il valore casuale η_x ha la forma di

$$\eta_x = \frac{R}{N} \sum_i \xi_i ((s_2 + d(\tan\varphi_A + x) \cos L_i(t_A)) - (d + c_2(\tan\varphi_A + x) \sin L_i(t_A))).$$

hæc etiam angulus qui à principio Sagittæ in continetur 101. 0. æqualiter erit. Vterque autem qui à Gemmarum principio, & qui à principio Aquarum continetur reliquorum ad duos rectos, graduum est 77. 30. ¶ Et de monstrata sunt nobis quæ proposuimus quod eadem in minoribus etiam obliqui circuli portionibus deductio est. Sed quæcum aduulm & præsentis negotii & singulorum descriptionis signorum, sufficienter dictum est.

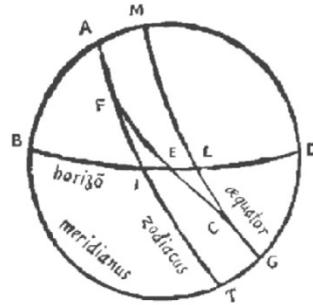
gulo ELC æqualis est, & reliquus EIT reliquo DLC æqualis, quæ erat demonstrandū.



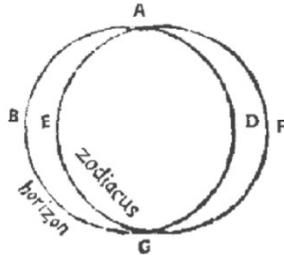
De angulis atq; arcibus qui ab eodem obliquo orbe atq; horizonte fiunt.
Cap. XI.

DEinceps autem demonstrabimus quomodo in data nobis declinatione, angulos etiam, quos obliquus circulus ad horizontem facit, inueniemus, faciliore namque uia ista reliquis capiuntur, quod igitur qui ad meridianum fiunt, eadem illis sunt qui ad recti orbis horizontem fiunt, perspicuum est. Sed ut in declinatione etiam orbe capiatur, primum demonstrandum est. Puncta obliqui circuli quæ ab eodem æquinoctiali puncto æqualiter distant, angulos qui ad eundem horizontem constituuntur, æquales faciunt.

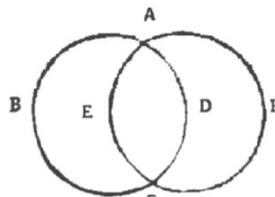
¶ Sit enim meridianus circulus ABGD, & æquinoctialis circuli semicirculus AEG. Horizontis uero circulus BED, & describantur duæ obliqui circuli portiones FIT & CLM sicut F & C puncta. Autumnalis æquinoctij punctum esse supponatur, & FI & CL arcus æquales, dico angulos etiã EIT & DLC æquales esse, quod inde apertum est: num EFI & ECL trilateræ figuræ æquales sunt, quoniam per ea quæ demonstrata sunt trilatera unius, tribus lateribus alterius singula singulis equalia sunt FI & CL. Præterea IE horizontis portio & EL æquales sunt, & similiter EF ascensus LC descensus, quate angulus quoque EIF an-



¶ Dico etiam quod punctorum diametraliter oppositorum orientalis angulus unius cum occidentali angulo alterius duobus rectis æqualis est, nam si circulum horizontis ABGD descriperimus obliquum etiam circulum AEGF in A & G punctis se ipsos intersecantes, utriusque simul FAD & FAE duobus rectis æquales sunt sed FAD ipsi FGD æqualis est. Vtriusque igitur simul FGD & BAE duos rectos faciunt.



¶ Hæc cum ita se habeant, quoniam etiam anguli qui ad eundem horizontem inspicuntur, quicquid ab eodem æquinoctiali signo æqualiter distant, æquales demonstrati sunt, & punctorum quæ æqualiter ab eodem solstitiali puncto distant, alterius orientalis angulus alterius occidentalis, duobus simul rectis æquales.



B 4 ¶ Euc

Figura 5.8. Una pagina dall'edizione del 1551 dell'Almagesto.

Pertanto, se i valori di ξ_i sono distribuiti normalmente con una dispersione pari a σ^2 , il valore η_x avrà una distribuzione gaussiana con la media nulla e la dispersione di

$$D(\eta_x) = \frac{R^2 \sigma^2}{N} (c_2 s_2 - d^2) (s_2 + 2d(x + \tan \varphi_A) + c_2 (x + \tan \varphi_A)^2). \quad (5.5.8)$$

Per cui,

$$F(x) = \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{D(\eta_x)}} \right), \quad (5.5.9)$$

dove $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(-u^2/2\right) du$.

I valori di γ_{stat} e φ_{stat} calcolati sopra sono le cosiddette stime puntuali dei parametri sconosciuti γ_A e φ_A . Dal momento che abbiamo trovato le funzioni di distribuzione per queste stime, possiamo studiare il problema dei possibili errori inerenti. Rispondiamo a questa domanda nei termini standard utilizzati per gli intervalli di confidenza basati sulle formule 5.5.5, 5.5.6, 5.5.8 e 5.5.9.

In matematica statistica il problema del calcolo dell'intervallo di confidenza dipende dalla seguente situazione che illustriamo con l'esempio della stima del valore γ_A . Questo valore è un errore deterministico di una certa natura commesso dal compilatore del catalogo. Come risultato della stima statistica di γ_A , nel nostro caso con l'aiuto del metodo dei minimi quadrati, arriviamo al valore casuale γ_{stat} . Se fossimo già riusciti a determinare γ_{stat} , ci si potrebbe chiedere quali siano i confini del valore sconosciuto γ_A .

Per evitare che questi confini diventino banali, dobbiamo definire un tasso accettabile di errore delle probabilità, cioè quelle probabilità di specificare quei confini che non devono contenere il valore effettivo di γ_A . Usiamo ε per riferirci al tasso accettabile di errore delle probabilità. In tal caso, il livello di confidenza dovrà essere $1 - \varepsilon$. Il valore casuale di γ_{stat} è distribuito normalmente con i parametri definiti dalle formule 5.5.5 e 5.5.6. Pertanto, per $x > 0$ avremo

$$P(|\gamma_{stat} - \gamma_A| < x) = \Phi(\sqrt{D_\gamma x}) - \Phi(-\sqrt{D_\gamma x}).$$

Definiamo il valore di $(\varepsilon/2)$, i frattili della distribuzione normale x_ε dall'equazione:

$$\Phi(\sqrt{D_\gamma x_\varepsilon}) - \Phi(-\sqrt{D_\gamma x_\varepsilon}) = 1 - \varepsilon.$$

o in alternativa un'altra equazione che dia lo stesso risultato $\Phi(-\sqrt{D_\gamma x_\varepsilon}) = \varepsilon/2$.

Per cui l'intervallo

$$I_\gamma(\varepsilon) = (\gamma_{stat} - x_\varepsilon, \gamma_{stat} + x_\varepsilon). \quad (5.5.10)$$

rappresenta l'intervallo di confidenza per γ_A con un livello di confidenza pari a $1 - \varepsilon$. Questo segue da $P(|\gamma_{stat} - \gamma_A| \geq x_\varepsilon) = \varepsilon$.

Quando proviamo a calcolare il valore di x_ε , dobbiamo appoggiarci in particolare al valore D_γ , che dipende dai parametri sconosciuti σ^2 e φ_A . Come si fa di solito in matematica statistica, nella formula sostituiamo σ^2 con D_γ per mezzo della dispersione residuale

$$\sigma_0^2(\gamma_{stat}, \varphi_{stat}, t_A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta B_i(t_A) - \gamma_{stat} \sin(L_i(t_A) + \varphi_{stat}))^2,$$

definita dalla formula 5.5.3 e da φ_A per mezzo di φ_{stat} . Anche il momento t_A della compilazione del catalogo resta a noi sconosciuto; pertanto, tutti i calcoli sopra elencati devono essere effettuati per tutti i momenti t , al fine di poter stimare l'errore sistematico $\gamma_{stat}(t)$, $\varphi_{stat}(t)$, ipotizzando che il catalogo sia stato compilato nell'epoca casuale e fissa t .

Allo stesso modo possiamo estrarre l'intervallo di confidenza per φ_A con il livello di confidenza $1 - \varepsilon$. Questo intervallo $I_\varphi(\varepsilon)$ assomiglierà a quanto segue:

$$\left(\varphi_{stat} - \frac{y_\varepsilon}{1 + \tan^2 \varphi_{stat} - y_\varepsilon \tan \varphi_{stat}}, \varphi_{stat} + \frac{y_\varepsilon}{1 + \tan^2 \varphi_{stat} + y_\varepsilon \tan \varphi_{stat}} \right), \quad (5.5.11)$$

y_ε è la soluzione dell'equazione $F(y) - F(-y_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, dove la funzione della distribuzione F viene definita dall'uguaglianza di 5.5.9, cioè $\varepsilon/2$, il frattile della corrispondente distribuzione normale.

NOTA: le stime riportate dei tassi degli errori effettivi per γ e φ nel catalogo, come le funzioni della datazione presunta, non sono solo importanti perché siamo in grado di compensarli, ma anche per la verifica indiretta di quanto sembri essere corretto l'approccio suggerito. Ad esempio, se arrivassimo a un valore di γ_{stat} che fosse molte volte maggiore al tasso di precisione del catalogo, starebbe a indicare l'esistenza di effetti sostanziali che non abbiamo preso in considerazione.

Tuttavia, per quanto riguarda la datazione stessa, il valore effettivo di γ_{stat} non prende parte alla corrispondente procedura. Tutto quello che dobbiamo sapere è la lunghezza del rispettivo intervallo di confidenza. Pertanto, si potrebbero semplificare di molto i calcoli come segue. Per esempio, si deve calcolare γ_{stat} e φ_{stat} per qualsiasi momento fisso nel tempo t_0 : 1900 d.C., il che non renderebbe necessari i calcoli di Newcomb. Quindi, al posto delle curve $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ avremo i valori costanti corrispondenti agli errori di osservazione; tuttavia, il sistema delle coordinate sarà pertinente all'epoca del 1900 d.C. Quindi tratteremo gli intervalli di confidenza attorno a questi valori costanti la cui lunghezza non dipenderà da t . Se effettuassimo la procedura statistica di datazione descritta di seguito, dovremmo finire con lo stesso intervallo della possibile datazione del catalogo a cui siamo arrivati nella stima degli errori γ e φ per la presunta epoca di datazione t . Le sole informazioni che perderemo saranno i valori effettivi stimati di γ_{stat} e φ_{stat} .

6. Corollari.

COROLLARIO 1. L'errore di gruppo della configurazione stellare risulta in detta configurazione dallo spostamento sulla sfera celeste. Questo spostamento potrebbe essere parametrizzato dai due parametri γ e φ (o γ e β), qualora dovessimo considerare esclusivamente le discrepanze latitudinali.

COROLLARIO 2. Di conseguenza, le discrepanze latitudinali inerenti al catalogo possono essere ridotte compensando gli errori di gruppo.

COROLLARIO 3. Se gli errori di gruppo coincidessero per buona parte del catalogo, questo errore comune si chiamerebbe sistematico e potrebbe essere trovato con i metodi della matematica statistica. A condizione che l'epoca di compilazione del catalogo sia uguale a t , i valori dei parametri $\varphi(t)$ e $\gamma(t)$ potrebbero essere facilmente valutati con il metodo dei minimi quadrati. Le corrispondenti stime di $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$ avranno le rispettive forme di 5.3.6 e 5.3.7.

COROLLARIO 4. È sufficiente conoscere i valori di $\gamma_{stat}(t_1)$ e $\gamma_{stat}(t_2)$ per due diversi momenti nel tempo, per poter ricostruire le funzioni $\gamma_{stat}(t)$ e $\varphi_{stat}(t)$.

COROLLARIO 5. Gli intervalli di confidenza $I_\varphi(\varepsilon)$ e $I_\gamma(\varepsilon)$ per i valori effettivi dei parametri $\varphi(t)$ e $\gamma(t)$ sono stati calcolati in base all'ipotesi che gli errori casuali si siano distribuiti normalmente. Vedi le rispettive formule 5.5.11 e 5.5.10.

Concludiamo riportando una pagina dell'edizione del 1551 dell'*Almagesto*, vedi la **Figura 5.8**.